AUFGABEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1) Mehrwegflaschen (Abitur Bremen 2010)

Mehrwegflaschen

Mehrwegflaschen haben eine sehr hohe Rücklaufquote. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine solche Flasche zurückgegeben wird, heißt Rückgabewahrscheinlichkeit. Bei Milchflaschen liegt sie bei 90%, bei Bierflaschen und Mineralwasserflaschen zwischen 96% und 98%.

a) Es werden zunächst Mehrweg - Mineralwasserflaschen betrachtet. Rechnen Sie im Folgenden mit einer Rückgabewahrscheinlichkeit pro Flasche von $p_W = 0{,}97$.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 16 einzeln verkauften Flaschen

- genau 15 Flaschen zurückgegeben werden.
- mindestens 15 Flaschen zurückgegeben werden.
- weniger als 14 Flaschen zurückgegeben werden.

Runden Sie Ihre Ergebnisse auf drei Nachkommastellen.

b) Jetzt betrachten wir Mehrweg- Milchflaschen mit einer Rückgabewahrscheinlichkeit von $p_M = 0{,}9$ pro Flasche.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 10 einzeln verkauften Milchflaschen mindestens eine nicht zurückgegeben wird.

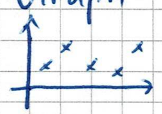
Ermitteln Sie, ab wie vielen verkauften Milchflaschen die Wahrscheinlichkeit, dass alle Flaschen zurückkommen, höchstens 5% beträgt.

Berechnen Sie, wie viele nicht zurückgegebene Milchflaschen ein Supermarkt pro 100 Flaschen im Mittel erwarten kann.

c) Bei den Milch - Mehrwegflaschen handelt es sich um Literflaschen. Jede zurückgegebene Flasche wird wieder gefüllt und verkauft.

- Erklären Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms, warum die Wahrscheinlichkeit, dass mit einer Flasche mindestens 5 Liter Milch verkauft werden, $0{,}9^4 = 65{,}61\%$ beträgt.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich mit einer Flasche genau 5 Liter Milch verkaufen lassen.
- Ermitteln Sie eine allgemeine Berechnungsvorschrift für den Verkauf von genau k Litern Milch in einer Mehrweg – Literflasche und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen mit $(k / P(X = k))$ im Bereich von $k = 1$ bis $k = 20$.

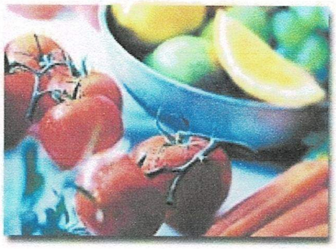
Gemeint ist ein Graph der folgenden Gestalt:



Wir nehmen an, dass nach 30 Füllungen eine Flasche wegen möglicher Beschädigungen aussortiert wird.

- Bestimmen Sie unter dieser Annahme eine Berechnungsvorschrift für den Erwartungswert für die Menge Milch, die mit einer Mehrwegflasche verkauft wird. Bedenken Sie dabei, dass mehr als 30 Füllungen nicht möglich sind. (Der Wert muss nicht berechnet werden. Ergebnis: ca. $9{,}6$ Liter)

2) Ernährungsstudie (Abitur Hamburg 2009)



Bei einer bundesweit durchgeführten, repräsentativen Studie im Rahmen der Vorsorgeuntersuchungen wurden die Ernährungsgewohnheiten sowie die Art und Häufigkeit der körperlichen Bewegung von erwachsenen Frauen und Männern im Alter zwischen 35 und 45 Jahren untersucht und mit ihren bei den Vorsorgeuntersuchungen ermittelten Cholesterin-Werten in Beziehung gesetzt.

Zunächst zu den Ernährungsgewohnheiten:

Bei den Männern dieser Altersgruppe gaben 5,5 % der Befragten an, sich vegetarisch zu ernähren.

a) Bestätigen Sie, dass man das Merkmal „Vegetarier" in einer zufällig gezogenen Stichprobe als binomialverteilt annehmen kann; geben Sie Situationen an, bei denen diese Annahme nicht gilt.

Gehen Sie im Folgenden zunächst davon aus, dass das Merkmal „Vegetarier" bei der betrachteten Gruppe von Männern binomialverteilt ist mit $p = 5{,}5\%$.

b)
- In einem Betrieb gehören 125 Männer zu dieser Altersgruppe zwischen 35 und 45 Jahren. Berechnen Sie, wie viele „vegetarische" Männer in dieser Stichprobe zu erwarten sind.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 60 Männern, die in einem Bio-Laden einkauften, genau 10 Männer Vegetarier waren.
  - Interpretieren Sie dieses Ergebnis.
  - Entscheiden Sie, ob man das Merkmal „Vegetarier" auch bei Bio-Laden-Kunden immer noch als binomialverteilt betrachten kann.

c) In einem anderen Betrieb ergab sich, dass sich kein Mann dieser Altersgruppe vegetarisch ernährt hat. Das erscheint erstaunlich.
- Bestimmen Sie, wie viele Männer dieser Altersgruppe höchstens in dem Betrieb sein dürften, damit die Wahrscheinlichkeit, dass kein Mann Vegetarier ist, immerhin noch größer als 5 % ist.

d) Wenn man Werte für eine binomialverteilte Größe mit kleinem p (und hinreichend großem Stichprobenumfang) berechnen möchte, so kann man die so genannte Poissonverteilung zur Näherung verwenden: $P(X = k) \approx \frac{(n \cdot p)^k}{k!} \cdot e^{-n \cdot p}$.

Gehen wir noch einmal zurück zu dem Betrieb mit den 125 Männern aus Aufgabenteil b).
- Bestimmen Sie die prozentuale Abweichung der Poisson-Näherung gegenüber der Binomialverteilung für das Ereignis, dass unter diesen 125 Männern weniger als drei Vegetarier sind.

Seit der letzten Gesundheitsreform werden im Rahmen der Vorsorgeuntersuchungen von über 35-Jährigen regelmäßig die Cholesterin-Werte (hier die LDL-Werte) im Blut bestimmt; hierfür liegen also statistisch gesicherte Daten vor.

Für die betrachtete Altersgruppe ergibt sich ein LDL-Mittelwert von 165 mg/dl mit einer Standardabweichung von 41 mg/dl.

Grundsätzlich gilt: Je höher der Wert ist, desto höher ist das medizinische Risiko, vor allem für Herzerkrankungen. Die grundlegenden Richtlinien sehen vor, selbst bei Personen ohne spezifische Risikofaktoren (wie Rauchen etc.) bei LDL-Werten oberhalb von 170 mg/dl eine *Änderung des Lebensstils* anzuraten.
Bei LDL-Werten oberhalb von 200 mg/dl wird zusätzlich dringend eine *medikamentöse Therapie* empfohlen.

Im Folgenden ist davon auszugehen, dass die LDL-Werte näherungsweise normalverteilt sind.

e) • Berechnen Sie unter allen erwachsenen Männern in der erwähnten Altersgruppe den Anteil derer, die ihren „Lebensstil ändern“ sollten.

• Ermitteln Sie, auf wie viele Männer mit dieser Empfehlung einer kommt, dem zusätzlich eine medikamentöse Therapie empfohlen wird.

• Bestimmen Sie die Mindestanzahl von zufällig ausgewählten erwachsenen Männern, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens ein Mann mit der „dringenden Therapieempfehlung“ darunter ist.

f) Der bundesweit vertretene „Verein für Bewegung und gesunde Ernährung (VBE)“ möchte neue Mitglieder mit folgender Behauptung werben:
“Unsere männlichen Mitglieder mittleren Alters haben dank unserer hervorragenden Beratung und Betreuung nach nur einem Jahr Mitgliedschaft einen mittleren LDL-Wert von nur 140 mg/dl!“
Auf Nachfrage teilt der Verein mit, dass die Standardabweichung des LDL-Wertes bei den männlichen Mitgliedern bei 40 mg/dl liegt. Mit kritischen Fragen konfrontiert, sagt die Pressesprecherin des Vereins: „Gut, gehen Sie hin, wählen Sie zehn männliche Mitglieder beliebig aus und bestimmen Sie deren Cholesterin-Wert. Wir ziehen die Behauptung zurück, wenn Sie unter diesen zehn Männern mehr als drei mit einem Wert von über 165 mg/dl finden.“

• Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Verein seine Behauptung **zu Unrecht** zurückziehen muss.

3) Werbeaktion (Abitur Bayern 2016)

Ein Getränkehersteller führt eine Werbeaktion durch, um die Verkaufszahlen seiner Saftschorlen zu erhöhen. Bei 100 000 der für die Werbeaktion produzierten zwei Millionen Flaschen wird auf der Innenseite des Verschlusses eine Marke für einen Geldgewinn angebracht. Von den Gewinnmarken sind 12 000 jeweils 5 € wert, der Rest ist jeweils 1 € wert. Alle Flaschen der Werbeaktion werden zufällig auf Kästen verteilt. Im Folgenden werden nur Flaschen aus der Werbeaktion betrachtet.

1 Es wird eine Flasche geöffnet. Betrachtet werden folgende Ereignisse:
A: „Der Verschluss enthält eine Gewinnmarke.“
B: „Der Verschluss enthält eine Gewinnmarke im Wert von 1 €.“

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$.

b) Es werden mehrere Flaschen geöffnet und für jede dieser Flaschen wird festgestellt, ob das Ereignis A eintritt. Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment näherungsweise durch eine Bernoullikette beschrieben werden kann.

Im Folgenden gilt beim Öffnen einer Flasche stets $P(A) = 0{,}05$ und $P(B) = 0{,}044$.

c) Es werden nacheinander zehn Flaschen geöffnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich erstmals in der fünften Flasche eine Gewinnmarke befindet.

d) Bestimmen Sie wie viele Flaschen man mindestens öffnen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 5 % mindestens zwei Gewinnmarken zu finden.

e) Berechnen Sie den Gesamtwert der Gewinnmarken, die Kunden beim Öffnen der 20 Flaschen eines Kastens im Mittel in den Verschlüssen finden.

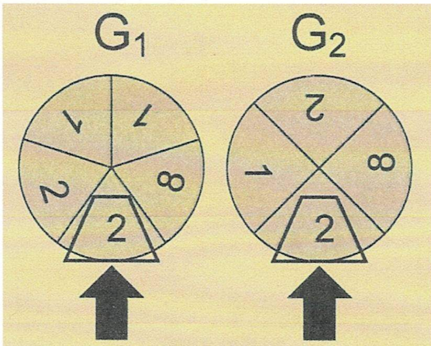
Nachdem die zwei Millionen Flaschen verkauft sind, wird die Werbeaktion fortgesetzt. Der Getränkehersteller verspricht, dass weiterhin jede 20. Flasche eine Gewinnmarke enthält. Aufgrund von Kundenäußerungen vermutet der Filialleiter eines Getränkemarkts jedoch, dass der Anteil der Saftschorle-Flaschen mit einer Gewinnmarke im Verschluss nun geringer als 0,05 ist, und beschwert sich beim Getränkehersteller.

2 Der Getränkehersteller bietet ihm an, anhand von 200 zufällig ausgewählten Flaschen einen Signifikanztest für die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit dafür, in einer Flasche eine Gewinnmarke zu finden, beträgt mindestens 0,05." auf einem Signifikanzniveau von 1 % durchzuführen. Für den Fall, dass das Ergebnis des Tests im Ablehnungsbereich der Nullhypothese liegt, verspricht der Getränkehersteller, seine Abfüllanlage zu überprüfen und die Kosten für eine Sonderwerbeaktion des Getränkemarkts zu übernehmen.

Ermitteln Sie den Ablehnungsbereich der Nullhypothese und bestimmen Sie anschließend unter der Annahme, dass im Mittel nur 3 % der Saftschorle-Flaschen eine Gewinnmarke enthalten, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Getränkemarkt nicht in den Genuss einer kostenlosen Sonderwerbeaktion kommt.

4) Glücksspiel (Baden-Württemberg 2017)

Bei dem dargestellten Glücksspielautomaten sind zwei Glücksräder G_1 und G_2 mit fünf bzw. vier gleich großen Kreissektoren angebracht.
Bei jedem Spiel werden sie in Drehung versetzt und laufen dann unabhängig voneinander aus. Schließlich bleiben sie so stehen, dass von jedem Rad genau eine Zahl im Rahmen angezeigt wird.
Der Spieleinsatz beträgt 2€.
Sind die beiden angezeigten Zahlen gleich, so wird deren Summe in Euro ausgezahlt; andernfalls wird nichts ausgezahlt.
Der Hauptgewinn besteht also darin, dass 16€ ausgezahlt werden.



a) Ein Spieler spielt zehn Mal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: „Das Glücksrad G_1 zeigt genau fünf Mal die Zahl 1.“
B: „Beim ersten Spiel beträgt die Summe der beiden angezeigten Zahlen 10.“
C: „Der Spieler erhält mindestens einmal den Hauptgewinn.“

b) Mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% soll in mindestens einem Spiel der Hauptgewinn erzielt werden.
Berechnen Sie, wie oft man dazu mindestens spielen muss.

c) Berechnen Sie, wie viel der Betreiber auf lange Sicht durchschnittlich pro Spiel verdient.

d) Der Betreiber möchte erreichen, dass bei zehn Spielen die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Hauptgewinn maximal 25% beträgt.
Dazu möchte er beim Glücksrad G_2 den Mittelpunktswinkel des Kreissektors verändern, der mit der Zahl 8 beschriftet ist.
Berechnen Sie, wie weit der Mittelpunktswinkel dieses Kreissektors maximal gewählt werden darf.

5) Autos (Abitur Bayern 2017)

Das elektronische Stabilitätsprogramm (ESP) eines Autos kann Schleuderbewegungen und damit Unfälle verhindern.

1 Gehen Sie bei den folgenden Aufgaben davon aus, dass 40 % aller Autos mit ESP ausgerüstet sind.

200 Autos werden nacheinander zufällig ausgewählt; die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der ausgewählten Autos mit ESP.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den ausgewählten Autos mindestens 70 mit ESP ausgerüstet sind.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.

A: „Das fünfte ausgewählte Auto ist das erste mit ESP.“

B: „Die Zufallsgröße X nimmt einen Wert an, der von ihrem Erwartungswert höchstens um eine Standardabweichung abweicht.“

2 In einem Parkhaus befinden sich insgesamt 100 Parkplätze.

a) Im Parkhaus sind 20 Parkplätze frei; vier Autofahrer suchen jeweils einen Parkplatz. Formulieren Sie in diesem Sachzusammenhang zu den folgenden Termen jeweils eine Aufgabenstellung, deren Lösung sich durch den Term berechnen lässt.

α) $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ **β)** $\binom{20}{4}$

Das Parkhaus ist nun mit 100 Autos besetzt, von denen 40 mit ESP ausgerüstet sind.

b) Sieben von diesen 100 Autos sind Kleinwagen und nicht mit ESP ausgerüstet, 90 sind keine Kleinwagen. Betrachtet werden folgende Ereignisse.

E: „Ein im Parkhaus zufällig ausgewähltes Auto ist mit ESP ausgerüstet.“

K: „Bei einem im Parkhaus zufällig ausgewählten Auto handelt es sich um einen Kleinwagen.“

Geben Sie die Bedeutung von $P_K(E)$ im Sachzusammenhang an und ermitteln Sie diese Wahrscheinlichkeit.

oder $P(E|K)$

c) 30 der im Parkhaus stehenden Autos werden zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter genau 40 % mit ESP ausgerüstet sind.

6) Bevölkerungsentwicklung (Beispielaufgaben Berlin 2010)

Frankreich und Deutschland sind die bevölkerungsreichsten Staaten der Europäischen Union. Die Prognosen bis 2050 weisen für diese beiden EU-Staaten eine unterschiedliche Entwicklung aus.

Bevölkerungsanteil der beiden Länder an der EU-Gesamtbevölkerung:

	Deutschland	Frankreich
2005	18,0 %	13,2 %
2050	16,6 %	14,6 %

Der Anteil der Jugendlichen im Alter von 15 bis 24 Jahren an der Gesamtbevölkerung des jeweiligen Landes betrug 2005 in Deutschland 11,7% und in Frankreich 13,0%.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der beiden folgenden Ereignisse:

A: Unter elf im Jahr 2005 zufällig ausgewählten EU-Bürgern befanden sich mindestens zwei Deutsche.

B: Unter im Jahr 2050 insgesamt 1000 zufällig auszuwählenden EU-Bürgern werden sich mindestens 125 und höchstens 155 Franzosen befinden.
~~Begründen Sie, dass hier die Näherung mittels Normalverteilung möglich ist.~~
Bestimme die Näherung mittels Normalv.

b) Bestimmen Sie, wie viele EU-Bürger man im Jahr 2005 mindestens auslosen müsste, um unter diesen mit mindestens 98 % Wahrscheinlichkeit wenigstens einen Deutschen zu ermitteln.

c) Ermitteln Sie für das Jahr 2005 den jeweiligen Anteil der Bevölkerung von Deutschland und Frankreich an der Gesamtbevölkerung beider Länder.

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Anteile die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

C: Ein aus den beiden Ländern ausgeloster Bürger ist ein Jugendlicher.

D: Ein aus den beiden Ländern ausgeloster Jugendlicher kommt aus Deutschland.

Interpretieren Sie das Ergebnis für die Wahrscheinlichkeit von Ereignis D im Vergleich zum oben bestimmten Anteil der Deutschen an der Gesamtbevölkerung beider Länder.

d) Für das Jahr 2007 sollte durch eine repräsentative Stichprobe ermittelt werden, ob sich der Anteil der Jugendlichen unter der deutschen Bevölkerung in der o. g. Altersgruppe verringert hat.

Es wurden 10000 Deutsche repräsentativ ausgelost und ermittelt, wie viele darunter Jugendliche im Alter von 15 bis 24 Jahren sind. Im Ergebnis dieser Untersuchung nimmt man an, dass der Anteil der o. g. Altersgruppe nur noch bei 11,5 % liegt.

Ermitteln Sie unter dieser Voraussetzung, in welches kleinstmögliche symmetrische Intervall um den Erwartungswert die Anzahl der betreffenden Jugendlichen mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit fällt.