AUFGABEN (Hilfsmittelfreier Teil)

1) Rechne aus:

a) $\binom{6}{3}$

b) $4!$

c) $\binom{6}{0}$

d) $\frac{5!}{3!}$

e) $\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{1}$

f) $\binom{k}{0}$

g) $\binom{t}{1}$

h) $\binom{t}{2}$

2) Es gilt: $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b^1 + \ldots + 6a^1b^5 + b^6$

Welcher Vorfaktor steht vor a^3b^3?

3) Zeige: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

4) Gegeben sei das Pascalsche Dreieck. Bestimme die fehlenden Werte:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad \boxed{?} \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad \boxed{?} \quad \boxed{?} \quad \boxed{?} \\
1 \quad \boxed{?} \quad \boxed{?} \quad \boxed{?} \quad \boxed{?} \quad 1
\end{array}$$

5) Ein Zahlenschloss hat 3 Einstellringe mit den Ziffern 0-9.

a) Wie viele Ziffernkombinationen sind möglich?

b) Wie viele Ziffernkombinationen sind möglich, wenn man weiß, dass die mittlere Ziffer ungerade ist?

c) Wie viele Ziffernkombinationen sind möglich, wenn man weiß, dass jede Ziffer nur einmal vorkommt?

6) Karl muss für das Abitur lernen. Er möchte an 5 Tagen in der Woche lernen. Dabei soll auf jeden Fall der Samstag oder Sonntag frei bleiben. Wie viele Möglichkeiten gibt es zur Festlegung der fünf Tage?

7) Gegeben seien 2 Urnen. In der ersten sind 3 weiße und 2 blaue Kugeln. In der zweiten sind 2 weiße und 4 blaue Kugeln. Wir ziehen zuerst aus der 1. Urne und dann aus der 2. Urne jeweils eine Kugel.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ziehen wir 2 weiße Kugeln?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ziehen wir genau eine weiße Kugel?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ziehen wir mindestens eine blaue Kugel?

8) Bestimme, auf wie viele Nullen das Ergebnis von 20! endet.

9) Gegeben sei ein sechsseitiger Würfel, den wir dreimal nacheinander werfen.

a) Wie viele verschiedene Ergebnisse sind möglich?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man nur gerade Zahlen (2, 4 oder 6) als Ergebnis?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man genau eine gerade Zahl unter den 3 Würfen?

10) Gegeben sei das folgende Glücksspiel:
Der Einsatz beträgt 2 €. Man wirft einen Würfel. Wenn man eine 1, 2 oder 3 erhält, so ist der Einsatz verloren. Wenn man eine 4 oder 5 erhält, so erhält man den Einsatz zurück. Wenn man eine 6 erhält, so werden 8 € zurückgezahlt (2 € Einsatz + 6 € Gewinn)

a) Bestimme den Gewinn bzw. Verlust, der auf lange Sicht für einen Spieler pro Spiel zu erwarten ist.
b) Wie müsste man die Summe, die man bei einer 6 zurück erhält, verändern, damit auf lange Sicht mit einem Gewinn von + 1 € pro Spiel für einen Spieler zu rechnen ist?

11) Wir werfen eine manipulierte Münze 30-mal. Die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf „Kopf" zu erhalten beträgt 60 %.

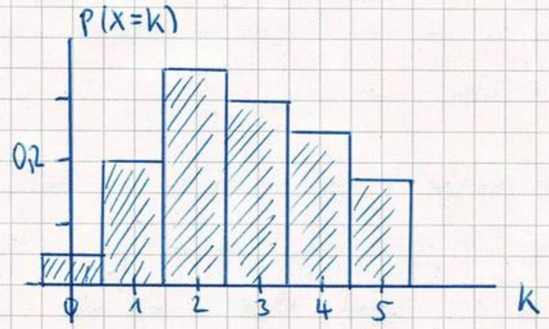
a) Gib einen Term an, mit dem man ausrechnen kann, mit welcher Wahrscheinlichkeit man genau 2-mal Kopf erhält.
b) Gegeben sei der folgende Term:

$$\binom{30}{9} \cdot 0{,}6^9 \cdot 0{,}4^{21}$$

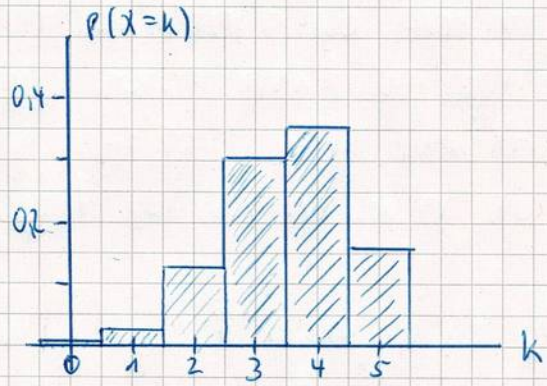
Was könnte man mit diesem Term ausrechnen?
c) Bestimme Erwartungswert und Standardabweichung und Varianz.

12) Wir werfen eine manipulierte Münze 5-mal. Die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf „Kopf" zu erhalten beträgt 70 %. Welches der unten dargestellten Histogramme gehört zu diesem Experiment?

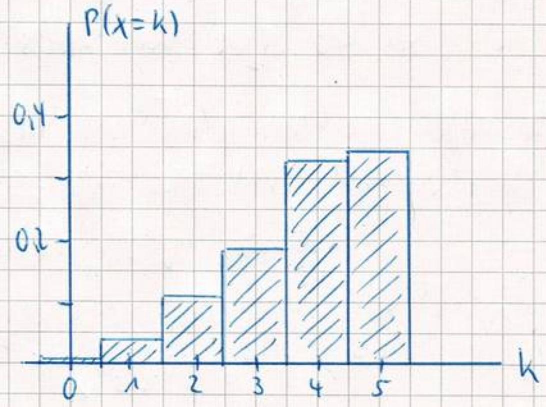
(a)



(b)



(c)



13) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 88)

In Urne A befinden sich zwei rote und drei weiße Kugeln. Urne B enthält drei rote und zwei weiße Kugeln.

Betrachtet wird folgendes Zufallsexperiment:

Aus Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt; danach wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne A gelegt.

a) **Geben** Sie alle Möglichkeiten für den Inhalt der Urne A nach der Durchführung des Zufallsexperiments **an**.

Betrachtet wird das Ereignis E: Nach Durchführung des Zufallsexperiments befinden sich wieder drei weiße Kugeln in Urne A.

b) **Untersuchen** Sie, ob das Ereignis E eine größere Wahrscheinlichkeit als sein Gegenereignis hat.

14) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 90)

Für ein Zufallsexperiment wird eine Zufallsgröße X festgelegt, welche die drei Werte -2, 1 und 2 annehmen kann.
In der Abbildung 35 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

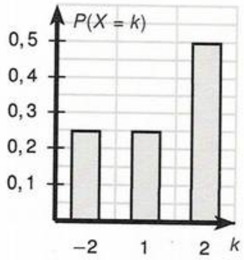


Abb. 35

a) **Ermitteln** Sie mithilfe der Abbildung den Erwartungswert der Zufallsgröße X.

b) Das Zufallsexperiment wird zweimal durchgeführt. Dabei wird jeweils der Wert der Zufallsgröße X notiert.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe dieser beiden Werte negativ ist.

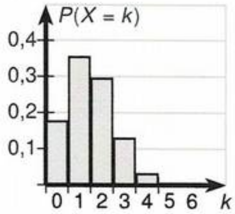
15) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 94)

Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

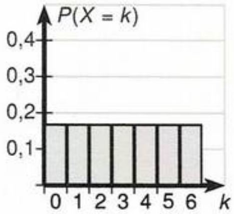
a) Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt.
Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür **an**, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist.

b) Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße X dar:

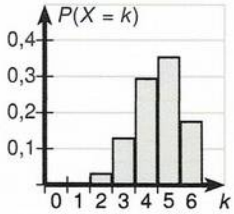
I



II



III



Geben Sie **an**, welche Abbildung dies ist.
Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind.

16) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 96)

Die binomialverteilten Zufallsgrößen X_1 und X_2 geben für Trefferwahrscheinlichkeiten von $p_1 = 0{,}8$ bzw. $p_2 = 0{,}2$ jeweils die Anzahl der Treffer bei fünf Versuchen an.

a) Betrachtet wird die Zufallsgröße X_1.
Geben Sie einen Term **an,** mit dem die Wahrscheinlichkeit für genau einen Treffer berechnet werden kann.

b) **Geben** Sie für eine der beiden Zufallsgrößen ein Ereignis **an**, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $1 - \left(\binom{5}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^1 + \binom{5}{5} \cdot 0{,}8^5\right)$ angegeben wird.

c) Abbildung 37 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_1.
Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_2 in Abbildung 38 **dar**.

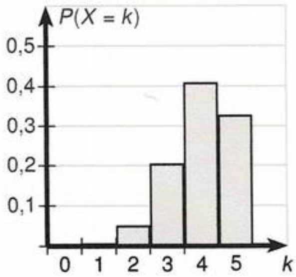


Abb. 37

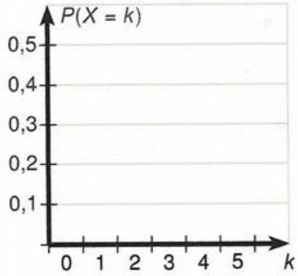


Abb. 38

17) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 97)

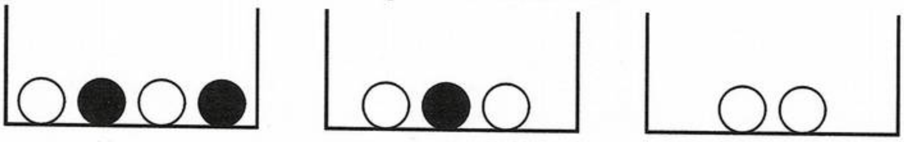
Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und dem Stichprobenumfang $n = 2$.

a) **Berechnen** Sie für $p = 0{,}4$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 1)$.

b) **Zeigen** Sie, dass für jeden Wert von p gilt: $P(X \neq 0) + P(X \neq 1) + P(X \neq 2) = 2$.

18) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 98)

Schwarze und weiße Kugeln sind wie folgt auf drei Urnen verteilt:



Urne *A*   Urne *B*   Urne *C*

a) Aus Urne *A* wird zunächst eine Kugel zufällig entnommen und in Urne *B* gelegt. Anschließend wird aus Urne *B* eine Kugel zufällig entnommen und in Urne *C* gelegt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach in Urne *C* zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel befinden.

b) Die drei Urnen mit den in der Abbildung dargestellten Inhalten bilden den Ausgangspunkt für folgendes Spiel:

> Es wird zunächst ein Einsatz von 1 Euro eingezahlt. Anschließend wird eine der drei Urnen zufällig ausgewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen. Nur dann, wenn diese Kugel schwarz ist, wird ein bestimmter Geldbetrag ausgezahlt.

Ermitteln Sie, wie groß dieser Geldbetrag sein muss, damit bei diesem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind.

19) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 84)

Die Abbildung 34 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern n und p.

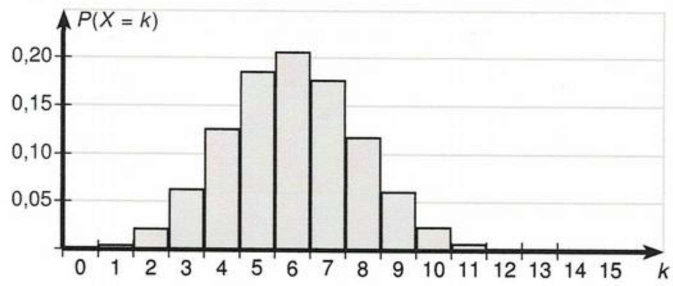


Abb. 34

a) **Bestimmen** Sie mithilfe der Abbildung 34 die Wahrscheinlichkeit $P(5 \leq X \leq 7)$.

b) X hat den Erwartungswert 6 und die Varianz 3,6.
Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von n und p.

20) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 87)

Ein Glücksrad ist in einen blauen, einen gelben und in einen roten Sektor unterteilt. Beim Drehen des Glücksrades tritt „Blau" mit der Wahrscheinlichkeit p und „Rot" mit der Wahrscheinlichkeit $2p$ ein.

a) **Geben** Sie **an**, welche Werte von p bei diesem Glücksrad möglich sind.

b) Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
Betrachtet wird das Ereignis E: Es tritt mindestens einmal „Rot" ein.
Zeigen Sie, dass das Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit $P(E) = 4p - 4p^2$ eintritt.

21) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 91)

Bei der Wintersportart Biathlon wird bei jeder Schießeinlage auf fünf Scheiben geschossen. Ein Biathlet tritt bei einem Einzelrennen zu einer Schießeinlage an, bei der er auf jede Scheibe einen Schuss abgibt. Diese Schießeinlage wird modellhaft durch eine Bernoullikette mit der Länge 5 und der Trefferwahrscheinlichkeit p beschrieben.

Geben Sie für die folgenden Ereignisse jeweils einen Term **an**, der die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in Abhängigkeit von p beschreibt.

- Der Biathlet trifft bei genau vier Schüssen.
- Der Biathlet trifft nur bei den ersten beiden Schüssen.