AUFGABEN (Hilfsmittelfreier Teil)

1) Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme

a)
$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x + y + z = 4 \\ \text{II.}\quad & x + 2y - z = 4 \\ \text{III.}\quad & x + y + 2z = 5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x + y + z = 6 \\ \text{II.}\quad & x + 2y + 2z = 11 \\ \text{III.}\quad & x - y - 2z = -7 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x + y + z = 2 \\ \text{II.}\quad & 2x - y - z = 1 \\ \text{III.}\quad & x + 2y - z = 6 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x + y + z = 2 \\ \text{II.}\quad & x - y + z = 4 \\ \text{III.}\quad & x + 2y + 2z = 3 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x + y + z = 3 \\ \text{II.}\quad & x + 2y - z = 2 \\ \text{III.}\quad & -x + 2y + z = 2 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x + y = 4 \\ \text{II.}\quad & x - 2y = -5 \end{aligned}$$

2) Was muss man für a einsetzen, damit $x=1$, $y=1$ und $z=1$ die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems ist?

$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x + y + z = 3 \\ \text{II.}\quad & x + a\cdot y + 2z = 7 \\ \text{III.}\quad & x - 3y + a\cdot z = 2 \end{aligned}$$

3) Was muss man für a und b einsetzen, damit $x=1$, $y=1$ und $z=1$ die Lösung des folgenden Gleichungssystems ist?

$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x + y + z = 3 \\ \text{II.}\quad & b\cdot x + y + a\cdot z = 5 \\ \text{III.}\quad & x + 2y + a\cdot z = 6 \end{aligned}$$

4) Gegeben sei eine ganzrationale Funktion 4. Grades

a) Wie viele Nullstellen kann die Funktion maximal haben?

b) Wie viele Extremstellen kann die Funktion maximal haben?

c) Wie viele Wendestellen kann die Funktion maximal haben?

d) Von welchem Grad ist die 2. Ableitung der Funktion?

e) Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Was ist dann $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$?

5) Wir haben eine Funktion mit 3 Nullstellen und 3 Extremstellen.

a) Von welchem Grad ist die Funktion mindestens?

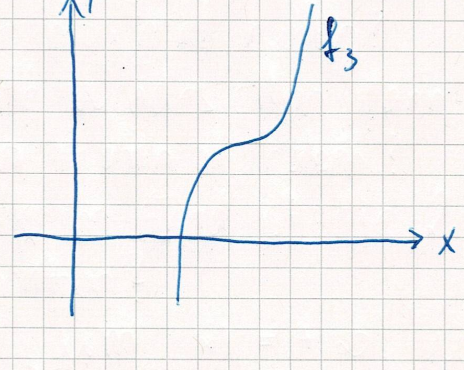
b) Skizziere einen möglichen Verlauf des Graphen der Funktion.

6) Von welchem Grad sind die nachfolgend abgebildeten Funktionen mindestens?

a)

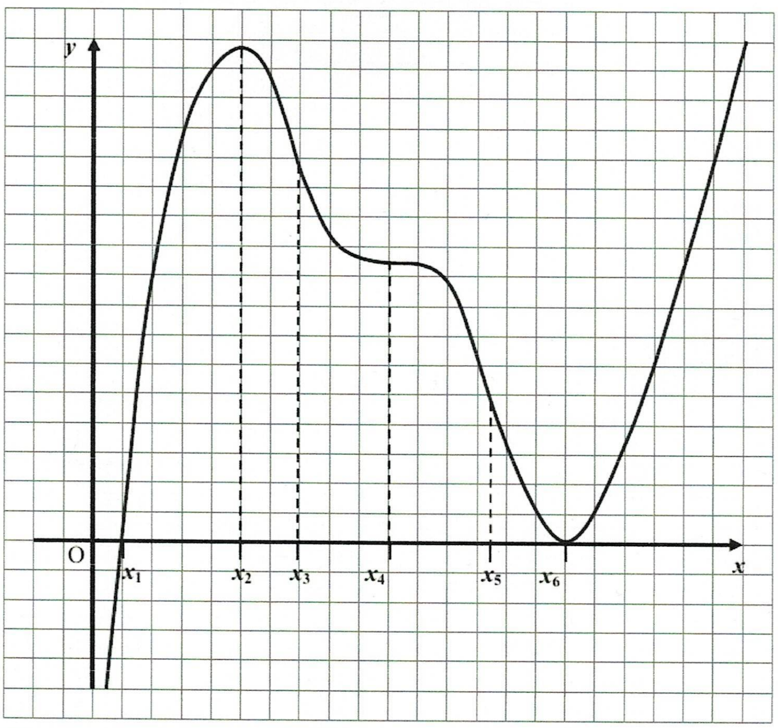
b)

c)



7) Gegeben sei eine kubische Funktion.
Sie verläuft durch A(0|0) und hat in $x=0$ eine Steigung von 2. Außerdem liegen B(1|1) und C(2|4) auf dem Graphen.
Bestimme die Funktionsgleichung.

8) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 17)
Die nachfolgende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f. Mit x_1 bis x_6 wurden besondere Punkte gekennzeichnet.
a) Um welche Art von besonderem Punkt handelt es sich jeweils?
b) Von welchem Grad ist die Funktion mindestens?



9) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 11)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h durch

$f(x) = x^2 + 2,$

$g(x) = (x-1)^2 + 1$ und

$h(x) = x^3 - 2x^2 + 2.$

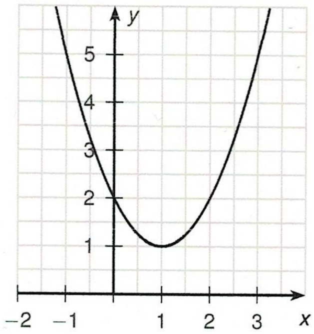


Abb. 7

Die Abbildung 7 zeigt den Graphen einer der drei Funktionen.
Geben Sie **an**, um welche Funktion es sich handelt.
Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.

10) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 9)

Die Abbildung 6 zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion f.

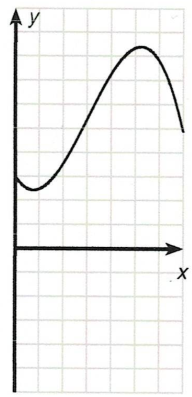


Abb. 6

a) Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f.

b) Begründen Sie, dass der Grad der Funktion f mindestens drei ist.

AUFGABEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1) Herr Tiex fährt mit seinem Auto. Seine Entfernung von Neuss kann beschrieben werden durch eine ganzrat. Funktion dritten Grades. Dabei ist x die Zeit in Stunden ab 10 Uhr und $f(x)$ die Entfernung in km. Der Definitionsbereich reicht von $x = 0$ bis $x = 12$. Herr Tiex ist um 11 Uhr 25,3 km entfernt, um 13 Uhr 33,1 km und um 15 Uhr 22,5 km. Um 20 Uhr beträgt die Entfernung 10 km.

a) Bestimme die Funktionsgleichung

Kontrollergebnis: $f(x) = 0{,}3x^3 - 5x^2 + 20x + 10$

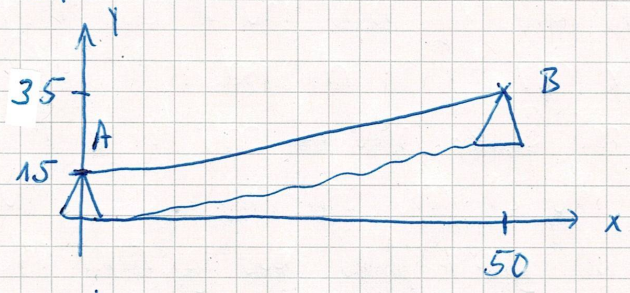
b) Wann wird die geringste und wann die größte Entfernung erreicht? Wie groß ist diese Entfernung jeweils?

c) Wann beträgt die Entfernung 30 km?

d) Von wann bis wann fährt Herr Tiex auf Neuss zu?

e) Wann wurde die höchste Geschwindigkeit erreicht?

2) Der Verlauf des Tragseils eines Skilifts zwischen zwei Stützen kann mit einer quadratischen Funktion f beschrieben werden. Die Funktion f hat in Punkt B eine Steigung von 0,5.



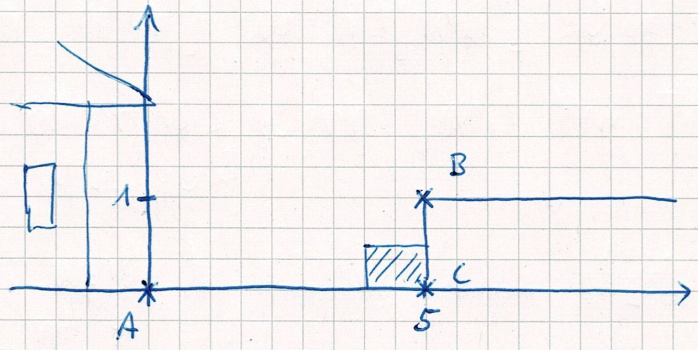
Eine Längeneinheit entspricht 1 m.

a) Bestimme eine Funktionsgleichung für f

Kontrollergebnis: $f(x) = 0{,}002x^2 + 0{,}3x + 15$

b) Wo ist der Verlauf des Seils am steilsten?

3)



In der Skizze sieht man eine Garage links und rechts (ab C bzw. B) eine Straße. Eine Längeneinheit entspricht 1 Meter. Von A aus soll eine Auffahrt bis B gebaut werden. Die Auffahrt soll in A waagerecht beginnen und in B waagerecht enden.

a) Bestimme eine Funktion 3. Grades, welche die Auffahrt darstellt

Kontrollergebnis: $f(x) = -\frac{2}{125}x^3 + \frac{3}{25}x^2$

b) Vor C befindet sich eine Felsplatte (1 m lang und 70 cm hoch). Wird sie überdeckt?

c) An welchem Punkt ist die Auffahrt am steilsten?

d) Eine Fliege bewegt sich entlang der Gerade $g(x) = 0{,}5x - 1$ Richtung Auffahrt. Wo landet sie auf der Auffahrt?

e) Welchen Winkel schließt die Flugroute mit der Auffahrt ein?

4) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 9)

Abbildung 15 zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion g vierten Grades.

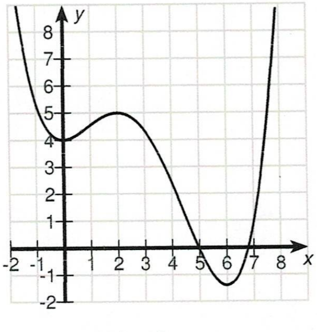


Abb. 15

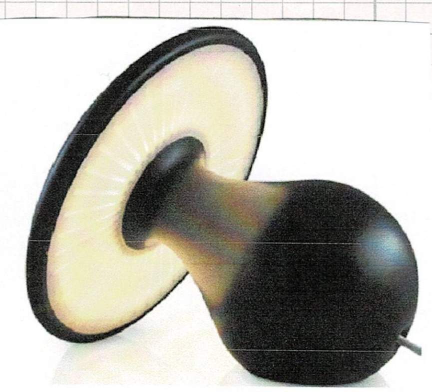
a) Begründen Sie, dass der Graph von g außerhalb des abgebildeten Bereichs keine Extrempunkte besitzt.

b) Betrachtet wird die Gleichung $g(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$.
Geben Sie alle Werte von a **an**, für die die Gleichung genau drei Lösungen hat.

c) Untersuchen Sie, ob der Wert des Terms $g'(3) \cdot g''(3)$ positiv ist.

5) (Abitur Bremen 2011)

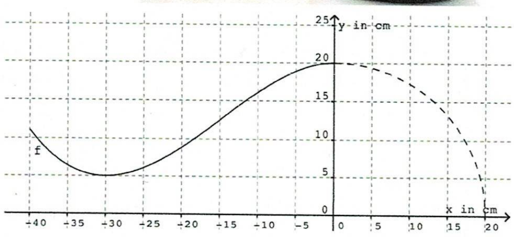
Bodenlampe



Die rechts abgebildete Bodenlampe des Künstlers Simon Duff hat die Form eines Pilzes. Sie setzt sich aus einem birnenförmigen Lampenfuß und einem aufgesetzten Lampenschirm zusammen. Zur Serienproduktion soll die Form des Lampenfußes durch mathematische Funktionen beschrieben werden (alle Angaben in cm).

a) Im Bereich $-40 \le x \le 0$ lässt sich die Form des Lampenfußes näherungsweise durch eine ganzrationale Funktion f dritten Grades beschreiben. Der Graph der Funktion gibt den Radius der Lampe an der Stelle x an. Der Graph von f hat einen Tiefpunkt in $T(-30/5)$ und im Punkt $H(0/20)$ eine waagerechte Tangente.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f. Weisen Sie nach, dass an der gewünschten Stelle ein Tiefpunkt liegt.

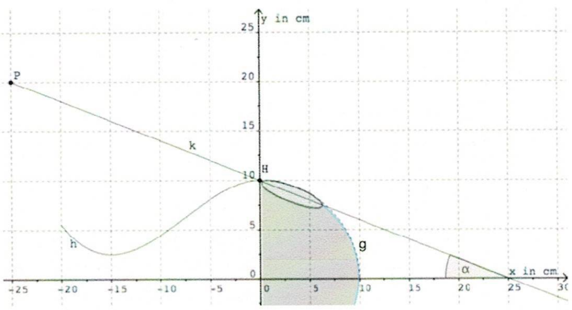


Im Folgenden beschäftigen wir uns mit einer kleineren Version der Bodenlampe.

b) Für eine kleinere Nachttischlampe wird für den Bereich $-20 \le x \le 0$ die Funktion h mit $h(x) = -\frac{1}{225}x^3 - \frac{1}{10}x^2 + 10$ vorgegeben.

Bestimmen Sie rechnerisch den kleinsten Durchmesser der Lampe in diesem Bereich. (Auf Grund der Lampenform können Sie davon ausgehen, dass dieser nicht in $x = 0$ oder $x = -20$ liegt.)

Im Bereich $0 \le x \le 10$ lässt sich die Form des kleineren Lampenfußes durch den Funktionsgraphen von g beschreiben (vgl. rechte Abbildung).



c) Damit der Lampenfuß stabil liegt, wird der Viertelkreis angeschnitten. Dadurch entsteht eine kreisförmige Auflagefläche. Der Schnitt erfolgt dabei entlang einer Geraden k, die durch die Punkte $P(-25/20)$ und $H(0/10)$ verläuft.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $k(x)$ der Geraden k.

Bestimme den Schnittwinkel α der Geraden k mit der x-Achse.