LÖSUNGEN (Hilfsmittelfreier Teil)

1) a) $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{120}{6} = 20$

b) $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$

c) $\frac{5!}{3!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}} = 5\cdot 4 = 20$

d) $\binom{6}{0} = 1$

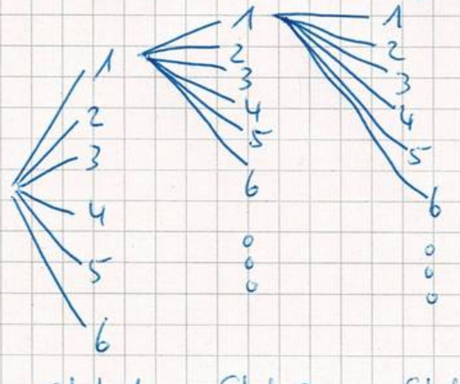
Erinnerung: $\binom{n}{0} = 1$ für alle n

e) $\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{1} = \frac{\cancel{3!}}{2!\cdot 1!}\cdot\frac{4!}{1!\cdot\cancel{3!}} = \frac{4!}{2!} = \frac{4\cdot 3\cdot\cancel{2\cdot 1}}{\cancel{2\cdot 1}} = 12$

f) $\binom{k}{0} = 1$

(siehe Erinnerung bei Teil d.)

2) a) Es sind $6^3 = 216$ Ergebnisse.



Stufe 1 Stufe 2 Stufe 3

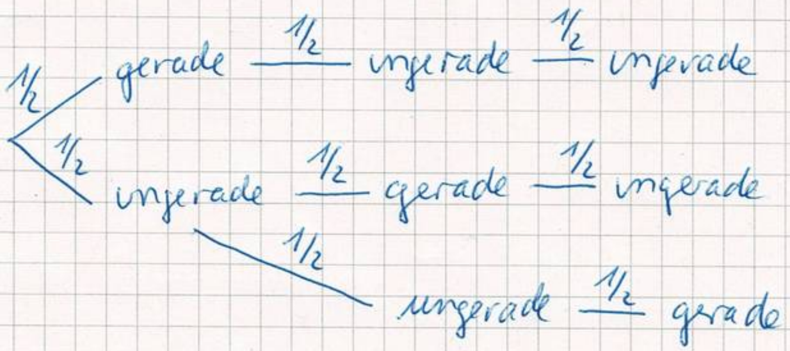
Mit jeder Stufe ver-6-facht sich die Anzahl der Ergebnisse.

b) Es gibt 3 gerade Zahlen und 6 Zahlen, die es insgesamt auf dem Würfel gibt. Die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf eine gerade Zahl zu erhalten beträgt daher $1/2$

$$\xrightarrow{1/2} \text{gerade} \xrightarrow{1/2} \text{gerade} \xrightarrow{1/2} \text{gerade}$$

$$P(\text{nur gerade}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{8}$$

c) Es gibt 3 Pfade, die das Ereignis eintreten lassen:



$$P(\text{genau eine gerade}) = 3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{3}{8}$$

Da es 3 ungerade Zahlen gibt (1, 3 und 5), beträgt die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf eine ungerade Zahl zu erhalten $1/2$.

3) a)

Gewinn / Verlust	-2 €	0	$+6$ €
Wahrscheinlichkeit	$1/2$	$1/3$	$1/6$

-2 € : 3 von 6 Ergebnissen (1, 2, 3)
$\Rightarrow$ Wahrs. $3/6 = 1/2$

0 : 2 von 6 Ergebnissen (4, 5)
$\Rightarrow$ Wahrs. $2/6 = 1/3$

$+6$ € : 1 von 6 Ergebnissen (6)
$\Rightarrow$ Wahrs. $1/6$

$$\mu = -2\,€ \cdot \frac{1}{2} + 0 + 6\,€ \cdot 1/6 = -1\,€ + 1\,€ = 0\,€$$

Auf lange Sicht ist weder Gewinn noch Verlust zu erwarten.

b)

Gewinn / Verlust	-2 €	0	$+a$ €
Wahrscheinlichkeit	$1/2$	$1/3$	$1/6$

$$\mu = -2\,€ \cdot \frac{1}{2} + 0 + a\,€ \cdot \frac{1}{6} = 1\,€$$

$$-1\,€ + \frac{a}{6}\,€ = 1\,€ \quad |+1\,€$$

$$\frac{a}{6}\,€ = 2\,€ \quad |\cdot 6$$

$$a\,€ = 12\,€$$

Da man a € Gewinn und den Einsatz

in Höhe von 2 € zurück erhält, sollte man
12 € + 2 € = 14 € erhalten.

4) Es handelt sich um Bernoulli-Ketten, da dasselbe Experiment 30-mal durchgeführt wird. Jedes Mal gibt es nur 2 Ausgänge: „Kopf" und „Nicht-Kopf" (= Zahl).

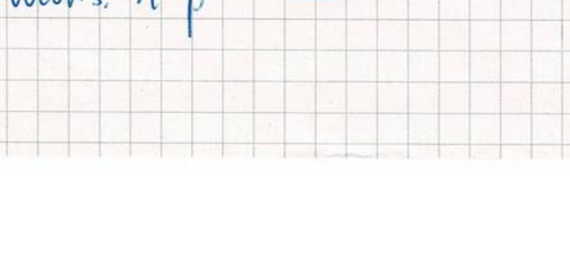
a) $P(X=2) = \binom{30}{2} \cdot 0{,}65^{2} \cdot 0{,}35^{28}$

b) $P(X=6) = \binom{30}{6} \cdot 0{,}65^{6} \cdot 0{,}35^{24}$

c) Man könnte bestimmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit man genau 9-mal Kopf erhält.

5) a) $1-p$: Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Drehen nicht „Blau" zu erhalten

$(1-p)^7$: Wahrscheinlichkeit dafür 7-mal hintereinander nicht die blaue Farbe zu erhalten

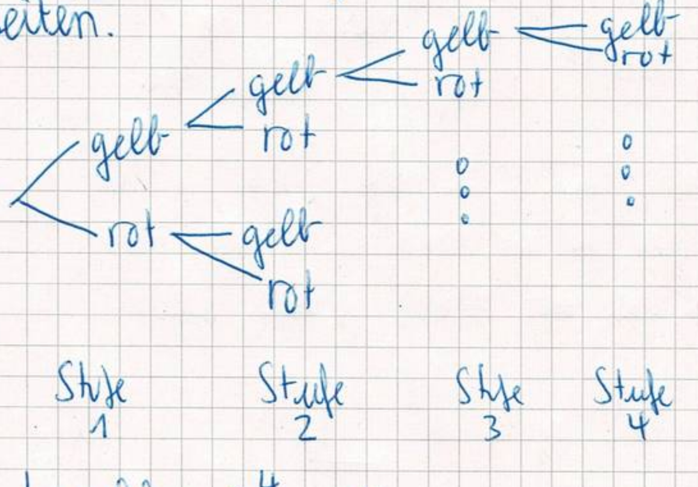


b) Es liegt eine Bernoulli-Kette vor, da man 10-mal dasselbe Experiment durchführt. Bei jedem Durchgang gibt es 2 Ausgänge: Blau und Nicht-Blau.

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^8$$

c) Die Aussage ist falsch. Die Durchgänge sind unabhängig voneinander; bei jedem Durchgang ist die Wahrs. für „Gelb" gleich groß. Insbesondere kann man nicht sagen, dass „Gelb" nun häufiger kommen „muss". Es gibt sogar eine kleine Wahrscheinlichkeit dafür, dass „Gelb" anschließend 100-mal nicht vorkommt.

d) Es gibt nur noch 2 mögliche Ergebnisse bei jedem Durchgang: „Gelb" und „Rot". Bei jeder Stufe gibt es diese 2 Möglichkeiten.



Anzahl $= 2^4 = 16$

6) Wir haben eine Binomialverteilung mit $n = 5$ und $p = 0{,}7$. Die größte Wahrscheinlichkeit liegt bei ca. $n \cdot p = 3{,}5$.

Histogramm a kann es nicht sein. Die größte Wahrscheinlichkeit müsste bei ca. 3,5 sein.

Histogramm c kann es nicht sein, da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 sein müsste. Es gilt aber $0{,}05 + 0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}35 + 0{,}2 + 0{,}15 = 1{,}15$ ↯

Histogramm d kann es nicht sein, da $n = 5$ und es müsste daher einen Balken für $k = 5$ geben.

⇒ Histogramm b ist richtig

7) Es gilt: $\mu = n \cdot p$

$$2 = 4 \cdot p$$

$$\frac{1}{2} = p$$

Wir prüfen die Wahrscheinlichkeiten nach:

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2 \cdot 1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{2 \cdot 1}} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{12}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{6}{16}$$

(könnte stimmen)

$$P(X=1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4!}{1! \, 3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= \frac{4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{1 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} \cdot \frac{1}{2^4} = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \quad ↯$$

Das Histogramm zeigt bei $k=1$ keine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$.

8) a) mindestens 8-mal $\hat{=}$ 8-mal, 9-mal oder 10-mal

Die Wahrscheinlichkeiten kann man aus dem Histogramm ablesen (zumindest mit ungefähren Werten)

$P(X=8) = 0{,}3$
$P(X=9) \approx 0{,}275$
$P(X=10) \approx 0{,}1$

$$\Rightarrow P(X \geq 8) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$$
$$\approx 0{,}3 + 0{,}275 + 0{,}1$$
$$= 0{,}675$$

b) Es gilt:

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^8 > 0$$

Jeder dieser drei Terme ist größer als Null. Das Ergebnis ist daher auch größer als Null.

9) $\mu = 0 \cdot 0{,}36 + 1 \cdot 0{,}48 + 2 \cdot 0{,}16$

$\mu = 0{,}48 + 0{,}32$

$\underline{\mu = 0{,}8}$

$\underline{n = 2}$ (da $k = 2$ der größte Wert für k ist)

$n \cdot p = \mu$

$2 \cdot p = 0{,}8$

$p = \frac{0{,}8}{2}$

$\underline{p = 0{,}4}$

10) a) $5 \leq X \leq 7$ meint: $X = 5$, $X = 6$, $X = 7$

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten kann man (zumindest als ungefähre Werte) aus dem Histogramm ablesen.

$P(X=5) \approx 0{,}18$

$P(X=6) \approx 0{,}21$

$P(X=7) \approx 0{,}17$

$$P(5 \leq X \leq 7) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=7)$$

$$\approx 0{,}18 + 0{,}21 + 0{,}17$$

$$= \underline{0{,}56}$$

k) Wir wissen: $\mu = n \cdot p = 6$

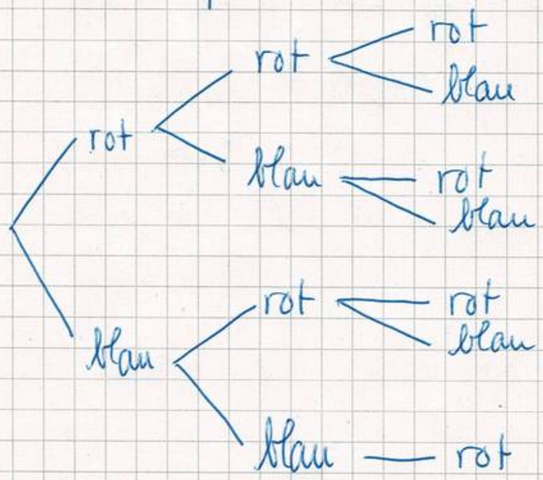
$Var = n \cdot p \cdot (1-p) = 3{,}6$

$$\begin{aligned}
n \cdot p \cdot (1-p) &= 3{,}6 \\
6 \cdot (1-p) &= 3{,}6 && \mid :6 \\
1-p &= 0{,}6 && \mid -1 \\
-p &= -0{,}4 \\
p &= 0{,}4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n \cdot p &= 6 \\
n \cdot 0{,}4 &= 6 && \mid :0{,}4 \\
n &= 15
\end{aligned}$$

Antwort: $p = 0{,}4$ und $n = 15$

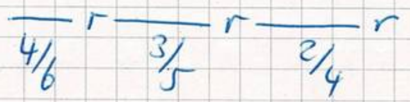
11)



a) Es sind 7 Ergebnisse:

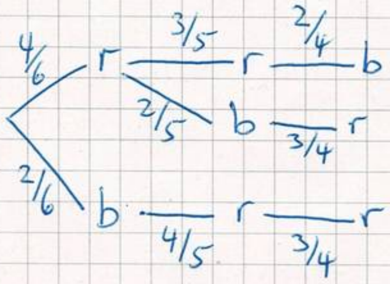
rrr, rrb, rbr, rbb, brr, brb, bbr

b)



$P(\text{nur rot}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$

c)



$P(\text{zwei rot}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}$

$= 3 \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$

$= 3 \cdot \frac{24}{120}$

$= \frac{3}{5}$

d) $P(\text{nur blau}) = 0$

Es gibt nur 2 blaue Kugeln.