

AUFGABEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1) In einer Urne sind 10 Kugeln. Davon sind 6 rot und 4 grün. Wir ziehen 12-mal mit Zurücklegen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man genau 6-mal eine rote Kugel?

b) Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Hilfe eines Histogramms dar. Wir betrachten das Ziehen einer roten Kugel als „Treffer“.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man höchstens 5-mal eine rote Kugel?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man weniger als 9-mal eine rote Kugel?

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man mindestens 9-mal eine rote Kugel?

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man zwischen 5-mal und 12-mal eine rote Kugel?

g) Die Zufallsgröße X zählt, wie oft ich eine rote Kugel ziehe. Bestimme den Erwartungswert und die Standardabweichung.

h) Gegeben sei der Term $\binom{12}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^{10}$.

Was kann man mit ihm ausrechnen?

i) Bestimme mit den Sigma-Regeln ein Intervall, in dem die Anzahl an roten Kugeln mit 90% Wahrscheinlichkeit liegen sollte. Überprüfe anschließend, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Anzahl tatsächlich in diesem Intervall liegt.

2) Mehrwegflaschen (Abitur Bremen 2010)

Mehrwegflaschen haben eine sehr hohe Rücklaufquote. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine solche Flasche zurückgegeben wird, heißt Rückgabewahrscheinlichkeit. Bei Milchflaschen liegt sie bei 90%, bei Bierflaschen und Mineralwasserflaschen zwischen 96% und 98%.

- a) Es werden zunächst Mehrweg - Mineralwasserflaschen betrachtet. Rechnen Sie im Folgenden mit einer Rückgabewahrscheinlichkeit pro Flasche von $p_w = 0,97$.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 16 einzeln verkauften Flaschen

- genau 15 Flaschen zurückgegeben werden.
- mindestens 15 Flaschen zurückgegeben werden.
- weniger als 14 Flaschen zurückgegeben werden.

Runden Sie Ihre Ergebnisse auf drei Nachkommastellen.

- b) Jetzt betrachten wir Mehrweg - Milchflaschen mit einer Rückgabewahrscheinlichkeit von $p_M = 0,9$ pro Flasche.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 10 einzeln verkauften Milchflaschen mindestens eine nicht zurückgegeben wird.

Ermitteln Sie, ab wie vielen verkauften Milchflaschen die Wahrscheinlichkeit, dass alle Flaschen zurückkommen, höchstens 5% beträgt.

Berechnen Sie, wie viele nicht zurückgegebene Milchflaschen ein Supermarkt pro 100 Flaschen im Mittel erwarten kann.

(7 Punkte)

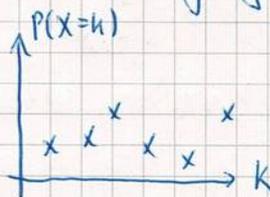
- c) Bei den Milch - Mehrwegflaschen handelt es sich um Literflaschen. Jede zurückgegebene Flasche wird wieder gefüllt und verkauft.

- Erklären Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms, warum die Wahrscheinlichkeit, dass mit einer Flasche mindestens 5 Liter Milch verkauft werden, $0,9^4 = 65,61\%$ beträgt.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich mit einer Flasche genau 5 Liter Milch verkaufen lassen.
- Ermitteln Sie eine allgemeine Berechnungsvorschrift für den Verkauf von genau k Litern Milch in einer Mehrweg - Literflasche und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen mit $(k / P(X = k))$ im Bereich von $k = 1$ bis $k = 20$.

Wir nehmen an, dass nach 30 Füllungen eine Flasche wegen möglicher Beschädigungen aussortiert wird¹.

- Bestimmen Sie unter dieser Annahme eine Berechnungsvorschrift für den Erwartungswert für die Menge Milch, die mit einer Mehrwegflasche verkauft wird. Bedenken Sie dabei, dass mehr als 30 Füllungen nicht möglich sind. (Der Wert muss nicht berechnet werden. Ergebnis: ca. 9,6 Liter)

Gemeint ist der folgende Typ von Graph:



3) Autos (Abitur Bayern 2017)

Das elektronische Stabilitätsprogramm (ESP) eines Autos kann Schleuderbewegungen und damit Unfälle verhindern.

- 1 Gehen Sie bei den folgenden Aufgaben davon aus, dass 40 % aller Autos mit ESP ausgerüstet sind.

200 Autos werden nacheinander zufällig ausgewählt; die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der ausgewählten Autos mit ESP.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den ausgewählten Autos mindestens 70 mit ESP ausgerüstet sind.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.

A: „Das fünfte ausgewählte Auto ist das erste mit ESP.“

B: „Die Zufallsgröße X nimmt einen Wert an, der von ihrem Erwartungswert höchstens um eine Standardabweichung abweicht.“

- 2 In einem Parkhaus befinden sich insgesamt 100 Parkplätze.

a) Im Parkhaus sind 20 Parkplätze frei; vier Autofahrer suchen jeweils einen Parkplatz. Formulieren Sie in diesem Sachzusammenhang zu den folgenden Termen jeweils eine Aufgabenstellung, deren Lösung sich durch den Term berechnen lässt.

$$\alpha) 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$$

$$\beta) \binom{20}{4}$$

Das Parkhaus ist nun mit 100 Autos besetzt, von denen 40 mit ESP ausgerüstet sind.

b) 30 der im Parkhaus stehenden Autos werden zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter genau 40 % mit ESP ausgerüstet sind.

4) Werbeaktion (Abitur Bayern 2016)

Ein Getränkehersteller führt eine Werbeaktion durch, um die Verkaufszahlen seiner Saftschorlen zu erhöhen. Bei 100 000 der für die Werbeaktion produzierten zwei Millionen Flaschen wird auf der Innenseite des Verschlusses eine Marke für einen Geldgewinn angebracht. Von den Gewinnmarken sind 12 000 jeweils 5 € wert, der Rest ist jeweils 1 € wert. Alle Flaschen der Werbeaktion werden zufällig auf Kästen verteilt. Im Folgenden werden nur Flaschen aus der Werbeaktion betrachtet.

1 Es wird eine Flasche geöffnet. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

A: „Der Verschluss enthält eine Gewinnmarke.“

B: „Der Verschluss enthält eine Gewinnmarke im Wert von 1 €.“

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$.
- b) Es werden mehrere Flaschen geöffnet und für jede dieser Flaschen wird festgestellt, ob das Ereignis A eintritt. Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment näherungsweise durch eine Bernoullikette beschrieben werden kann.

Im Folgenden gilt beim Öffnen einer Flasche stets $P(A) = 0,05$ und $P(B) = 0,044$.

- c) Es werden nacheinander zehn Flaschen geöffnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich erstmals in der fünften Flasche eine Gewinnmarke befindet.
- d) Bestimmen Sie , wie viele Flaschen man mindestens öffnen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 5 % mindestens zwei Gewinnmarken zu finden.
- e) Berechnen Sie den Gesamtwert der Gewinnmarken, die Kunden beim Öffnen der 20 Flaschen eines Kastens im Mittel in den Verschlüssen finden.

Nachdem die zwei Millionen Flaschen verkauft sind, wird die Werbeaktion fortgesetzt. Der Getränkehersteller verspricht, dass weiterhin jede 20. Flasche eine Gewinnmarke enthält. Aufgrund von Kundenäußerungen vermutet der Filialleiter eines Getränkemarkts jedoch, dass der Anteil der Saftschorle-Flaschen mit einer Gewinnmarke im Verschluss nun geringer als 0,05 ist, und beschwert sich beim Getränkehersteller.

2 Der Getränkehersteller bietet ihm an, anhand von 200 zufällig ausgewählten Flaschen einen Test zu machen. Wenn unter den 200 Flaschen weniger als 4 mit Gewinnmarke sind, so soll davon ausgegangen werden, dass der Anteil der Saftschorle-Flaschen mit Gewinnmarke tatsächlich nun geringer als 0,05 ist. In diesem Fall

verspricht der Getränkehersteller, seine Abfüllanlage zu überprüfen und die Kosten für eine Sonderwerbeaktion des Getränkemarkts zu übernehmen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird korrekt erkannt, dass der Anteil weiterhin bei 0,05 liegt?

b) Bestimmen Sie anschließend unter der Annahme, dass im Mittel nur 3% der Saftschorle-Flaschen eine Gewinnmarke enthalten, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Getränkemarkt nicht in den Genuss einer kostenlosen Sonderwerbeaktion kommt.

5) (Abitur Baden-Württemberg 2017)

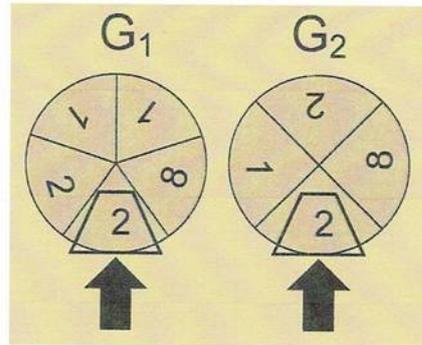
Bei dem dargestellten Glücksspielautomaten sind zwei Glücksräder G_1 und G_2 mit fünf bzw. vier gleich großen Kreissektoren angebracht.

Bei jedem Spiel werden sie in Drehung versetzt und laufen dann unabhängig voneinander aus. Schließlich bleiben sie so stehen, dass von jedem Rad genau eine Zahl im Rahmen angezeigt wird.

Der Spieleinsatz beträgt 2€.

Sind die beiden angezeigten Zahlen gleich, so wird deren Summe in Euro ausgezahlt; andernfalls wird nichts ausgezahlt.

Der Hauptgewinn besteht also darin, dass 16€ ausgezahlt werden.



- a) Ein Spieler spielt zehn Mal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: „Das Glücksrad G_1 zeigt genau fünf Mal die Zahl 1.“

B: „Beim ersten Spiel beträgt die Summe der beiden angezeigten Zahlen 10.“

C: „Der Spieler erhält mindestens einmal den Hauptgewinn.“

- b) Mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% soll in mindestens einem Spiel der Hauptgewinn erzielt werden.

Berechnen Sie, wie oft man dazu mindestens spielen muss.

- c) Berechnen Sie, wie viel der Betreiber auf lange Sicht durchschnittlich pro Spiel verdient.

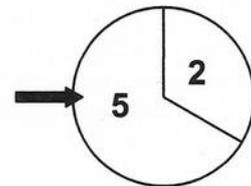
- d) Der Betreiber möchte erreichen, dass bei zehn Spielen die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Hauptgewinn maximal 25% beträgt.

Dazu möchte er beim Glücksrad G_2 den Mittelpunktswinkel des Kreissektors verändern, der mit der Zahl 8 beschriftet ist.

Berechnen Sie, wie weit der Mittelpunktswinkel dieses Kreissektors maximal gewählt werden darf.

6) (Abitur Bayern 2015)

Der Marketingchef einer Handelskette plant eine Werbeaktion, bei der ein Kunde die Höhe des Rabatts bei seinem Einkauf durch zweimaliges Drehen an einem Glücksrad selbst bestimmen kann. Das Glücksrad hat zwei Sektoren, die mit den Zahlen 5 bzw. 2 beschriftet sind (vgl. Abbildung).



Der Rabatt in Prozent errechnet sich als Produkt der beiden Zahlen, die der Kunde bei zweimaligem Drehen am Glücksrad erzielt.

Die Zufallsgröße X beschreibt die Höhe dieses Rabatts in Prozent, kann also die Werte 4, 10 oder 25 annehmen. Die Zahl 5 wird beim Drehen des Glücksrads mit der Wahrscheinlichkeit p erzielt.

Vereinfachend soll davon ausgegangen werden, dass jeder Kunde genau einen Einkauf tätigt und auch tatsächlich am Glücksrad dreht.

- a) Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde bei seinem Einkauf einen Rabatt von 10 % erhält.

(Ergebnis: $2p - 2p^2$)

- b) Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsgröße X gilt:
 $E(X) = 9p^2 + 12p + 4$.

- c) Die Geschäftsführung will im Mittel für einen Einkauf einen Rabatt von 16 % gewähren. Berechnen Sie für diese Vorgabe den Wert der Wahrscheinlichkeit p .

- d) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde bei seinem Einkauf den niedrigsten Rabatt erhält, beträgt $\frac{1}{9}$. Bestimmen Sie, wie viele Kunden mindestens an dem Glücksrad drehen müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens einer der Kunden den niedrigsten Rabatt erhält.

7) (Abitur Hamburg 2011)

Seit 1984 gibt es in Deutschland die Anschnallpflicht, das heißt die Pflicht für Fahrzeuginsassen, die vorgeschriebenen Gurte während der Fahrt anzulegen, anderenfalls droht ein Bußgeld und im Falle eines Unfalls ein zumindest teilweiser Verlust des Versicherungsschutzes.

Wie gut dieses Gebot in der Praxis eingehalten wird, drückt sich in der Anschnallquote aus, die den Anteil der während der Fahrt angeschnallten Autofahrer (an allen Autofahrern) angibt.

Werte für diese Quote sind schwer zu erhalten; die BAST (Bundesanstalt für das Straßenwesen) veröffentlichte 2004 eine Untersuchung, bei der sie eine Anschnallquote für Fahrer von 94% angab. Nehmen Sie diese Zahl als theoretischen Richtwert in den folgenden Untersuchungen; gehen Sie weiterhin davon aus, dass in dieser Aufgabe nicht zwischen weiblichen und männlichen Fahrzeuglenkern unterschieden wird: „Fahrer“ bezieht sich auf beide Geschlechter.



- a) Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
A – Unter zehn beobachteten Fahrern fuhr genau ein Fahrer nicht angeschnallt.
B – Von 20 beobachteten Fahrern hatten alle den Gurt angelegt.
C – Unter zwanzig beobachteten Fahrern waren höchstens achtzehn angeschnallt.

- b) • Bestimmen Sie die Zahl der Fahrzeuge, die beobachtet werden müssen, bis die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen nicht angeschnallten Fahrer zu beobachten, auf über 99% gestiegen ist.
- Sie beobachten einen nicht angeschnallten Fahrer.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die nächsten fünfzehn Fahrer angeschnallt sind.
 - Entscheiden Sie durch Rechnung, ob die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Nach fünfzehn angeschnallten Fahrern kommt ein nicht angeschnallter Fahrer“ mit der eben bestimmten Wahrscheinlichkeit gleich ist.
- c) • Ermitteln Sie für 400 beobachtete PKW den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Anzahl der angeschnallten Fahrer.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 400 Fahrern nicht mehr als 10 nicht angeschnallt sind.

Ein Hinweis zur Verkehrsdichte: Auf einer stark befahrenen Autobahn passieren pro Tag 100 000 Autos einen bestimmten Beobachtungspunkt, auf einer stark befahrenen Bundesstraße 40 000 Autos pro Tag, auf einer stark befahrenen vierspurigen Stadtstraße 25 000 Autos pro Tag.

- d) Auf Nachfrage sagt die BAST, dass ihre Aussage zur Anschnallquote genauer „(94±1)% aller Fahrzeuglenker fahren angeschnallt“ lautet. (Man sagt dann, die Aussage ist auf 1 % sicher.)

Als Gleichung bedeutet dies: $\frac{\sqrt{n \cdot 0,94 \cdot (1 - 0,94)}}{n} = 0,01$.

- Leiten Sie diese Gleichung im Kontext der Aussage her.
- Ermitteln Sie die Mindestgröße der Stichprobe, die die BAST gezählt haben muss, um ihre Aussage zur Genauigkeit vertreten zu können.
- Berechnen Sie auch den notwendigen Umfang, den eine Stichprobe haben müsste, damit die daraus gewonnene Aussage auf 0,1% sicher ist.
- Beurteilen Sie Ihre Resultate in Hinblick auf realistische Stichprobengrößen.

8) Ernährung (Abitur Hamburg 2009)

Bei einer bundesweit durchgeführten, repräsentativen Studie im Rahmen der Vorsorgeuntersuchungen wurden die Ernährungsgewohnheiten sowie die Art und Häufigkeit der körperlichen Bewegung von erwachsenen Frauen und Männern im Alter zwischen 35 und 45 Jahren untersucht und mit ihren bei den Vorsorgeuntersuchungen ermittelten Cholesterin-Werten in Beziehung gesetzt.

Zunächst zu den Ernährungsgewohnheiten:

Bei den Männern dieser Altersgruppe gaben 5,5 % der Befragten an, sich vegetarisch zu ernähren.



- a) Bestätigen Sie, dass man das Merkmal „Vegetarier“ in einer zufällig gezogenen Stichprobe als binomialverteilt annehmen kann; geben Sie Situationen an, bei denen diese Annahme nicht gilt.

Gehen Sie im Folgenden zunächst davon aus, dass das Merkmal „Vegetarier“ bei der betrachteten Gruppe von Männern binomialverteilt ist mit $p = 5,5\%$.

- b) • In einem Betrieb gehören 125 Männer zu dieser Altersgruppe zwischen 35 und 45 Jahren. Berechnen Sie, wie viele „vegetarische“ Männer in dieser Stichprobe zu erwarten sind.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 60 Männern, die in einem Bio-Laden einkaufen, genau 10 Männer Vegetarier waren.
 - Interpretieren Sie dieses Ergebnis.
 - Entscheiden Sie, ob man das Merkmal „Vegetarier“ auch bei Bio-Laden-Kunden immer noch als binomialverteilt betrachten kann.
- c) In einem anderen Betrieb ergab sich, dass sich kein Mann dieser Altersgruppe vegetarisch ernährt hat. Das erscheint erstaunlich.
- Bestimmen Sie, wie viele Männer dieser Altersgruppe höchstens in dem Betrieb sein dürften, damit die Wahrscheinlichkeit, dass kein Mann Vegetarier ist, immerhin noch größer als 5 % ist.
- d) Wenn man Werte für eine binomialverteilte Größe mit kleinem p (und hinreichend großem Stichprobenumfang) berechnen möchte, so kann man die so genannte Poissonverteilung zur Näherung verwenden: $P(X = k) \approx \frac{(n \cdot p)^k}{k!} \cdot e^{-n \cdot p}$.
- Gehen wir noch einmal zurück zu dem Betrieb mit den 125 Männern aus Aufgabenteil b).
- Bestimmen Sie die prozentuale Abweichung der Poisson-Näherung gegenüber der Binomialverteilung für das Ereignis, dass unter diesen 125 Männern weniger als drei Vegetarier sind.

9) Gepäckaufgabe (Abitur Hamburg 2005)

Auf einem bestimmten Flughafen geben die Passagiere an den Schaltern Gepäck auf. Die Gepäckstücke bekommen jeweils einen Anhänger mit einem Strichcode auf Papieraufklebern, der den Zielflughafen angibt. Alle an den verschiedenen Schaltern aufgegebenen Gepäckstücke laufen über viele Förderbänder und schließlich zum Code-Lesegerät, durch das dann die Stücke einzeln auf die richtigen Flugzeuge verteilt werden sollen. Auf dem Weg zum Lesegerät werden aber einige Anhänger verknickt oder verschmutzt, so dass dann diese Gepäckstücke vom Lesegerät nicht der richtigen Maschine zum Zielflughafen zugewiesen werden. Der Anteil der fehlgeleiteten Gepäckstücke hat sich über lange Zeit im Mittel als stabil gezeigt und beträgt ca. 3,5 %.

Rechnen Sie in dieser Aufgabe mit exakt 3,5 % .

- a) Begründen Sie, warum man die Zufallsgröße X , die die Anzahl der vom Code-Lesegerät fehlgeleiteten Gepäckstücke zählt, als binomialverteilt annehmen kann.
- b) Für eine Fokker F27 werden 45 Gepäckstücke aufgegeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
- Alle 45 Gepäckstücke finden durch das Lesegerät ihre richtige Maschine.
 - Genau 2 der 45 Gepäckstücke werden fehlgeleitet.
 - Höchstens 4 der 45 Gepäckstücke werden fehlgeleitet.
 - Es werden mehr als 4 der 45 Gepäckstücke fehlgeleitet.

c) Die Flughafengesellschaft rechnet mit Kosten von 70 € pro fehlgeleitetem Gepäckstück.

Um ihre Gesamtkosten in diesem Bereich zu vermindern, werden die Anhänger verbessert. Dadurch werden nur noch 0,5 % der Gepäckstücke vom Code-Leser fehlgeleitet. 3 % der Gepäckstücke werden als unleserlich ausgesondert. Diese ausgesonderten Stücke werden dann von einem Angestellten weiter bearbeitet. Dieser kann 80 % der ausgesonderten Stücke richtig zuordnen. Die restlichen Stücke bleiben am Startflughafen und werden erst auf Suchantrag zugestellt.

Eine Prüfung durch den Angestellten kostet 10 €, eine Zustellung nach Suchantrag insgesamt 100 €.

Berechnen Sie die dadurch erreichte Minderung der erwarteten Kosten pro Koffer.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlgeleitetes Gepäckstück innerhalb eines Monats überhaupt nicht wieder auffindbar ist, beträgt nur ca. 0,02 %. Wir nennen einen solches Gepäckstück „Verlustkoffer“.

Monatlich fliegen von dem Flughafen im Schnitt 8 000 Passagiere mit ca. 12 000 aufgegebenen Gepäckstücken nach Boston.

Die folgenden Fragen beziehen sich nur auf diese Flugstrecke.

Bei großem n und kleinem p ist die Poisson-Verteilung eine gute Näherung für die Binomial-Verteilung. Dabei ist $P(Z = k) \approx \frac{1}{e^\mu} \cdot \frac{\mu^k}{k!}$, wobei in dieser Aufgabe Z die Anzahl der Verlustkoffer unter den innerhalb eines Jahres aufgegebenen Koffern beschreibt.

Verwenden Sie, wo möglich, die anliegende Tabelle.

- Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert $\mu = 28,8$ gilt, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den in einem Jahr aufgegebenen Gepäckstücken tatsächlich genau 29 Verlustkoffer auftreten.
- Da für jeden Verlustkoffer Entschädigungszahlungen in (mittlerer) Höhe von 400 € geleistet werden müssen, möchte sich die Flughafengesellschaft gegen hohe Entschädigungssummen versichern. Um die Versicherungsprämie gering zu halten, wird die Entschädigungssumme eines Jahres nur dann versichert, wenn Sie 12 000 € übersteigt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fall eintritt?

Daten zur Poisson-Verteilung

$$\mu = 28,8$$

k	$P(X \leq k)$
23	0,1615
24	0,2146
25	0,2758
26	0,3435
27	0,4158
28	0,4901
29	0,5639
30	0,6348
31	0,7006
32	0,7599

k	$P(X \leq k)$
33	0,8116
34	0,8554
35	0,8915
36	0,9203
37	0,9427
38	0,9597
39	0,9723
40	0,9813
41	0,9877
42	0,9921