5) a) gesucht: Maximum

$f'(x) = 1 \cdot e^{1,25-x} + (x+1) \cdot (-1) \cdot e^{1,25-x}$
$= 1 \cdot e^{1,25-x} + (-x-1) \cdot e^{1,25-x}$
$= (-x) \cdot e^{1,25-x}$

$f''(x) = -1 \cdot e^{1,25-x} + (-x) \cdot (-1) \cdot e^{1,25-x}$
$= -1 \cdot e^{1,25-x} + x \cdot e^{1,25-x}$
$= (x-1) \cdot e^{1,25-x}$

N.B.: $f'(x) = 0$
$-x \cdot e^{1,25-x} = 0$
$-x = 0$ oder $e^{1,25-x} = 0$
$\lightning$
$x = 0$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$
$f''(0) = -1 \cdot e^{1,25} < 0$
$\Rightarrow$ Max. bei $x = 0$

Ränder: $f(-1) = 0$
$f(0) = 3,49$
$f(7) = 0,025$

Die höchste Stelle ist der Punkt (0/3,49).
Sie befindet sich in 3,49 m Höhe.

b) Punkte der Gerade:
A(0/3,49)
B(-17,5/0)

(1) $g(x) = mx + b$

$$m = \frac{3,49}{17,5} = 0,1994$$

$\Rightarrow g(x) = 0,1994x + b$

$A(0|3,49)$ auf $g \Rightarrow g(0) = 3,49$

$$0,1994 \cdot 0 + b = 3,49$$

$$b = 3,49$$

$\Rightarrow g(x) = 0,1994x + 3,49$

(II) $\frac{1}{10} < 0,1994 < \frac{1}{5}$

Sie erfüllt die Voraussetzungen.

c) (I) gesucht: Wendepunkt

$f''(x) = (x-1) \cdot e^{1,25-x}$

$f'''(x) = 1 \cdot e^{1,25-x} + (x-1) \cdot (-1) \cdot e^{1,25-x}$

$= 1 \cdot e^{1,25-x} + (-x+1) \cdot e^{1,25-x}$

$= (-x+2) \cdot e^{1,25-x}$

N.B.: $f''(x) = 0$

$(x-1) \cdot e^{1,25-x} = 0$

$x - 1 = 0$ oder $e^{1,25-x} = 0$ ↯

$x = 1$

H.B.: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$f'''(1) = 1 \cdot e^{1,25-1} = 1 \cdot e^{0,25} > 0$

$\Rightarrow$ Wendepunkt

y-Wert:

$$f(1) = 2 \cdot e^{1{,}25-1} = 2 \cdot e^{0{,}25}$$

$$\Rightarrow W\left(1 \,/\, 2e^{0{,}25}\right)$$

$$\Rightarrow h(x) = -\tfrac{1}{7}x + b$$

$W(1/2e^{0{,}25})$ auf $h$ $\Rightarrow h(1) = 2e^{0{,}25}$

$$\Rightarrow -\tfrac{1}{7} \cdot 1 + b = 2e^{0{,}25}$$

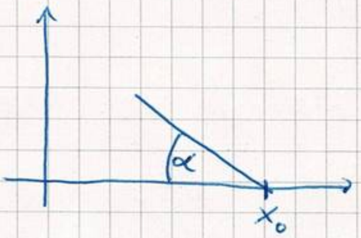
$$b = 2e^{0{,}25} + \tfrac{1}{7}$$

$$b \approx 2{,}711$$

$$\Rightarrow h(x) = -\tfrac{1}{7}x + 2{,}711$$

$$= -0{,}1429x + 2{,}711$$

11



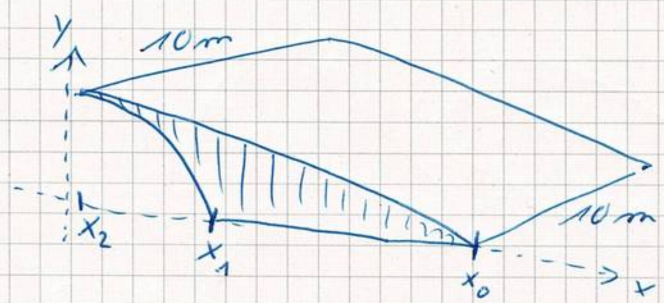

$$\tan\alpha = h'(x_0)$$

$$\tan\alpha = -0{,}1429 \qquad (h'(x) = -0{,}1429 \text{ für alle } x)$$

$$\alpha = -8{,}1325°$$

Der Winkel ist $\alpha = -8{,}1325°$.

d)




Bestimmung von $x_0$ und $x_1$ und $x_2$:

zu $x_0$: $h(x) = 0$

$$-0{,}1429\,x + 2{,}711 = 0$$

$$0{,}1429\,x = 2{,}711$$

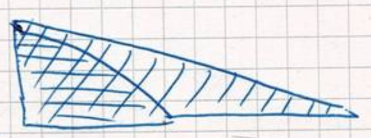
$$x_0 = 18{,}97$$

zu $x_1$: $x_1 = 7$ (nach Voraussetzung)

zu $x_2$: $x_2 = 1$ (Aufgabe c(i))

$V = 10\,m \cdot G$ $\qquad$ $G$ = schraffierte Fläche

$$G = \underbrace{\int_{x_2}^{x_0} h(x)\,dx}_{\text{Fläche }|||} - \underbrace{\int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx}_{\text{Fläche }\equiv}$$



$$G = \int_{1}^{18{,}97} -0{,}1429x + 2{,}711\,dx - \int_{1}^{7} (x+1)\cdot e^{1{,}25-x}\,dx$$

$$= \left[-0{,}0714\,x^2 + 2{,}711\,x\right]_1^{18{,}97} - \int_1^7 (x+1)\cdot e^{1{,}25-x}\,dx$$

Suche nach einer Stammfunktion von $f$:

$$\int_a^b (x+1)\cdot e^{1,25-x}\,dx = \left[(x+1)\cdot(-1)\cdot e^{1,25-x}\right]_a^b - \int_a^b -1\cdot e^{1,25-x}\,dx$$

$$= \left[(-x-1)\cdot e^{1,25-x}\right]_a^b - \left[e^{1,25-x}\right]_a^b$$

$$= \left[(-x-2)\cdot e^{1,25-x}\right]_a^b$$

$$\Rightarrow F(x) = (-x-2)\cdot e^{1,25-x}$$

D.h. für die Fläche G:

$$G = \left[-0,0714x^2 + 2,711x\right]_1^{18,97} - \left[(-x-2)\cdot e^{1,25-x}\right]_1^7$$

$$= 23,076 \quad - 3,823$$

$$= 19,253\ m^2$$

$$\Rightarrow V = 10m \cdot 19,253\ m^2$$

$$\underline{V = 192,53\ m^3}$$

6) a) ① geringste Sterberate gesucht: Minimum

$$s'(t) = 0 + 10\cdot 2\cdot(t-6)\cdot 1\cdot e^{-0,09t} + 10(t-6)^2\cdot(-0,09)\cdot e^{-0,09t}$$

$$= 20(t-6)\cdot e^{-0,09t} + (-0,9)(t-6)^2\cdot e^{-0,09t}$$

$$= \left(20(t-6) + (-0,9)\cdot(t-6)^2\right)\cdot e^{-0,09t}$$

$$= \left(20t - 120 + (-0,9)\left(t^2 - 12t + 36\right)\right)e^{-0,09t}$$

$$= \left(20t - 120 - 0,9t^2 + 10,8t - 32,4\right)\cdot e^{-0,09t}$$

$$= \left(-0,9t^2 + 30,8t - 153,4\right)\cdot e^{-0,09t}$$

$$s''(t) = (-1{,}8t + 30{,}8) \cdot e^{-0{,}09t} + (-0{,}9t^2 + 30{,}8t - 153{,}4) \cdot (-0{,}09) \cdot e^{-0{,}09t}$$

$$= (-1{,}8t + 30{,}8) \cdot e^{-0{,}09t} + (0{,}081t^2 - 2{,}772\,t + 13{,}806) \cdot e^{-0{,}09t}$$

$$= (0{,}081t^2 - 4{,}572t + 44{,}606) \cdot e^{-0{,}09t}$$

N.B.: $s'(t) = 0$

$$(-0{,}9t^2 + 30{,}8t - 153{,}4) \cdot e^{-0{,}09t} = 0$$

$$-0{,}9t^2 + 30{,}8t - 153{,}4 = 0 \text{ oder } e^{-0{,}09t} = 0$$

(GTR ...) $\quad$ $\lightning$

$t_1 = 6{,}05$

$t_2 = 28{,}17$

H.B.: $s'(t) = 0$ und $s''(t) \neq 0$

$s''(6{,}05) = 11{,}55 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt

$s''(28{,}17) = -1{,}577 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt

Ränder („in den Jahren 1960 bis 2020")

$1960 \downarrow t=0 \qquad 2020 \downarrow t=60$

$s(0) = 960$

$s(6{,}05) = 600{,}01$

$s(60) = 731{,}7$

Die geringste Sterberate war 1966 mit 600,01 Personen pro Jahr.

(11) Differenz

$d(t) = g(t) - s(t)$

$d(t) = 400 + 20 \cdot (t+1)^2 \cdot e^{-0{,}1t} - 600 -$
$10 \cdot (t-6)^2 \cdot e^{-0{,}09t}$

$= -200 + 20 \cdot (t+1)^2 \cdot e^{-0{,}1t} - 10 \cdot (t-6)^2 \cdot e^{-0{,}09t}$

$= -200 + 20 \cdot (t^2+2t+1) \cdot e^{-0{,}1t} - 10 \cdot (t^2-12t+36) \cdot e^{-0{,}09t}$

$= -200 + (20t^2+40t+20) \cdot e^{-0{,}1t} + (-10t^2+120t-360) \cdot e^{-0{,}09t}$

$d'(t) = (40t+40) \cdot e^{-0{,}1t} + (20t^2+40t+20) \cdot (-0{,}1) \cdot e^{-0{,}1t}$
$+ (-20t+120) e^{-0{,}09t} + (-10t^2+120t-360) \cdot e^{-0{,}09t} \cdot (-0{,}09)$

$= (40t+40) \cdot e^{-0{,}1t} + (-2t^2-4t+2) \cdot e^{-0{,}1t}$
$+ (-20t+120) \cdot e^{-0{,}09t} + (+0{,}9t^2-10{,}8t+32{,}4) \cdot e^{-0{,}09t}$

$= (-2t^2+36t+42) \cdot e^{-0{,}1t} + (0{,}9t^2-30{,}8t+152{,}4) \cdot e^{-0{,}09t}$

N.B.: $d'(t) = 0$
(GTR...)
$t = 15{,}25$

H.B.: $d'(t) = 0$ und $d''(t) \neq 0$
Alternative:
$d'(t) = 0$ und $d'(t)$ hat Vorzeichenwechsel

$d'(15) = 1{,}688$
$d'(16) = -4{,}661$
} VZW von + nach −
$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $t = 15{,}25$

Ränder:
$d(0) = -540$
$d(15{,}25) = 732{,}4338$
$d(60) = -147{,}23$

Der größte Unterschied liegt bei 1975 vor mit + 732,43 Personen pro Jahr.

(III) Zunahme

Zunahme liegt vor, wenn $d(t) > 0$

$d(t) = 0$

(GTR...)

$t_1 = 3{,}22$

$t_2 = 45{,}32$

Wir wissen aus a(II):

$d(0) < 0$

$d(15{,}25) > 0$

$d(60) < 0$

$\Rightarrow$ Zunahme von 1963 bis 2005.

b) Population: gesucht Stammfunktion von $d(t)$

$$\int_a^b (20t^2+40t+20)\cdot e^{-0{,}1t}\,dt$$

$$= \left[(20t^2+40t+20)\cdot(-10)\cdot e^{-0{,}1t}\right]_a^b - \int_a^b (40t+40)\cdot(-10)\cdot e^{-0{,}1t}\,dt$$

$$= \left[(20t^2+40t+20)\cdot(-10)\cdot e^{-0{,}1t}\right]_a^b - \left(\left[(40t+40)\cdot 100\cdot e^{-0{,}1t}\right]_a^b - \int_a^b 40\cdot 100\cdot e^{-0{,}1t}\,dt\right)$$

$$= \left[(-200t^2-400t-200)\cdot e^{-0{,}1t}\right]_a^b - \left[(4000t+4000)\cdot e^{-0{,}1t}\right]_a^b$$

$$+ \left[4000\cdot(-10)\cdot e^{-0{,}1t}\right]_a^b$$

$$= \left[(-200t^2-4400t-44\,200)\,e^{-0{,}1t}\right]_a^b$$

$$\int_a^b (-10t^2+120t-360)\cdot e^{-0{,}09t}\,dt$$

$$= \left[(-10t^2+120t-360)\cdot(-11{,}\bar{1})\cdot e^{-0{,}09t}\right]_a^b$$

$$- \int_a^b (-20t+120)\cdot(-11{,}\bar{1})\cdot e^{-0{,}09t}\,dt$$

$$= \left[(-10t^2+120t-360)\cdot(-11{,}\bar{1})\cdot e^{-0{,}09t}\right]_a^b$$

$$-\left(\left[(-20t+120)\cdot(11{,}1)^2\cdot e^{-0{,}09t}\right]_a^b - \int_a^b(-20)\cdot(11{,}1)^2\cdot e^{-0{,}09t}\,dt\right)$$

$$= \left[(111{,}\bar{1}\,t^2-1333{,}\bar{3}\,t+4000)\cdot e^{-0{,}09t}\right]_a^b$$

$$- \left[(-20\cdot 11{,}1^2\cdot t+120\cdot 11{,}1^2)\cdot e^{-0{,}09t}\right]_a^b$$

$$+ \left[(-20)\cdot(11{,}1)^3\cdot e^{-0{,}09t}\right]_a^b$$

$$= \left[(111{,}\bar{1}\,t^2-1333{,}\bar{3}\,t+4000)\cdot e^{-0{,}09t}\right]_a^b$$

$$- \left[(-2469{,}14\,t+14.814{,}81)\cdot e^{-0{,}09t}\right]_a^b$$

$$+ \left[27.434{,}84\cdot e^{-0{,}09t}\right]_a^b$$

$$= \left[(111{,}\bar{1}\,t^2+1135{,}8067\,t+16.620{,}84)\cdot e^{-0{,}09t}\right]_a^b$$

$$\Rightarrow D(t) = -200t + (-200t^2 - 4400t - 44200)\cdot e^{-0,1t} + (111,\overline{1}t^2 + 1135,8067t + 16.620,84)\cdot e^{-0,09t} + c$$

Es gilt $D(0) = 20.000$

$$\Rightarrow D(0) = -44200 + 16.620,84 + c = 20.000$$

$$-27.579,16 + c = 20.000$$

$$c = 47.579,16$$

$$\Rightarrow D(t) = -200t + (-200t^2 - 4400t - 44200)\cdot e^{-0,1t} + (111,\overline{1}t^2 + 1135,8067t + 16.620,84)\cdot e^{-0,09t} + 47.579,16$$

(I) Population 2017

$D(57) = 35.635,15$

(II) $D(x) = 20.000$

(GTR)

$t_1 = 0$

$t_2 = 6,87$

Dies passiert 1966.