LÖSUNGEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1a) gesucht: Maximum

$f'(x) = 0{,}54x \cdot e^{-0{,}12x} + 0{,}27x^2 \cdot (-0{,}12) \cdot e^{-0{,}12x}$
$= 0{,}54x\, e^{-0{,}12x} + (-0{,}0324x^2) \cdot e^{-0{,}12x}$
$= (-0{,}0324x^2 + 0{,}54x) \cdot e^{-0{,}12x}$

$f''(x) = (-0{,}0648x + 0{,}54) \cdot e^{-0{,}12x} + (-0{,}0324x^2 + 0{,}54x) \cdot$
$(-0{,}12) \cdot e^{-0{,}12x}$
$= (-0{,}0648x + 0{,}54) \cdot e^{-0{,}12x} + (0{,}003888x^2$
$- 0{,}0648x) \cdot e^{-0{,}12x}$
$= (0{,}003888x^2 - 0{,}1296x + 0{,}54) \cdot e^{-0{,}12x}$

N.B.: $f'(x) = 0$
$(-0{,}0324x^2 + 0{,}54x) \cdot e^{-0{,}12x} = 0$
$-0{,}0324x^2 + 0{,}54x = 0$ oder $e^{-0{,}12x} = 0$
(GTR...) $\quad$ ↯
$x_1 = 0$
$x_2 = 16{,}\overline{6}$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$
$f''(0) = 0{,}54 \cdot e^0 = 0{,}54 > 0$
$\Rightarrow$ TP bei $x = 0$
$f''(16{,}\overline{6}) = -0{,}073 < 0$
$\Rightarrow$ HP bei $x = 16{,}\overline{6}$

Ränder:
$f(0) = 0$
$f(16{,}\overline{6}) = 10{,}15$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

Das Maximum wird nach $16\frac{2}{3}$ min erreicht mit 10,15 Personen pro Minute.

b) $f(x) = 3$

$0{,}27x^2 e^{-0{,}12x} = 3$

(GTR ...)

$x_1 = 4{,}3195$

$x_2 = 42{,}3774$

Im Zeitraum vom Anfang bis zur etwa 4. Minute und nach der ca. 42. Minute kommen weniger als 3 Personen pro Minute.

c) ① $F'(x) = 0 - \left((4{,}5x + 37{,}5) \cdot e^{-0{,}12x} + (2{,}25x^2 + 37{,}5x + 312{,}5) \cdot (-0{,}12) \cdot e^{-0{,}12x}\right)$

$= -\left((4{,}5x + 37{,}5) \cdot e^{-0{,}12x} + (-0{,}27x^2 - 4{,}5x - 37{,}5) \cdot e^{-0{,}12x}\right)$

$= -\left((-0{,}27x^2) \cdot e^{-0{,}12x}\right)$

$= 0{,}27x^2 \cdot e^{-0{,}12x}$

⑪ $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(312{,}5 - \underbrace{(2{,}25x^2 + 37{,}5x + 312{,}5) \cdot e^{-0{,}12x}}_{\text{läuft gegen } 0}\right) = 312{,}5$

Es sind $312{,}5 \approx 312$ Personen.

d) ① Anzahl der wartenden Personen:

$F(20) = 134{,}466$

Nach $x = 20$ kommen noch weitere Personen. Diese sind aber erst nach der betrachteten Person dran.

$134,466 : 6 = 22,411$

Es sind ungefähr 22 Minuten.

(11) Jetzt müssen die neu Dazugekommenen nach 19:20 Uhr mit berücksichtigt werden.

$F(x)$: Zahl der Personen, die insgesamt zum Zeitpunkt x gekommen sind (die draußen warten oder schon im Kino sind)

x : Zeit in Minuten ab 19 Uhr

$g(x) = 6 \cdot (x-20)$

Zahl der Personen, die insgesamt schon im Kino sind

x : Zeit in Minuten ab 19 Uhr

$x \geq 20$. Wir müssen $(x-20)$ als Faktor verwenden, damit x weiter die Zeit in Minuten ab 19 Uhr sein kann.

$h(x) = F(x) - 6 \cdot (x-20)$, $x \geq 20$

Anzahl der Personen, die vor dem Kino stehen zum Zeitpunkt x

gesucht: Max. von $h(x)$

$$h(x) = 312{,}5 - (2{,}25x^2 + 37{,}5x + 312{,}5) \cdot e^{-0{,}12x} - 6(x-20)$$
$$= 312{,}5 - (2{,}25x^2 + 37{,}5x + 312{,}5) \cdot e^{-0{,}12x} - 6x + 120$$
$$= -(2{,}25x^2 + 37{,}5x + 312{,}5) \cdot e^{-0{,}12x} - 6x + 432{,}5$$
$$h'(x) = 0{,}27x^2 e^{-0{,}12x} - 6$$
$$h''(x) = (-0{,}0324x^2 + 0{,}54x) \cdot e^{-0{,}12x}$$

N.B: $h'(x) = 0$

$0{,}27x^2 e^{-0{,}12x} = 6$

(GTR ...)

$x_1 = -3{,}7616$ } außerhalb des Definitionsbereichs

$x_2 = 7{,}3087$

$x_3 = 31{,}8322$

H.B.: $h'(x) = 0$ und $h''(x) \neq 0$

$h''(31{,}83) \approx -0{,}34 < 0$

$\Rightarrow$ lok. Max bei $x = 31{,}83$

Ränder:

$h(20) = 134{,}466$

$h(31{,}83) = 158{,}474$

$\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ Die größte Zahl wird nach 31,83 Minuten erreicht mit $158{,}47 \approx 158$ Wartenden.

(III) gesucht: Nullstellen

$h(x) = 0$

$-(2{,}25x^2 + 37{,}5x + 312{,}5) \cdot e^{-0{,}12x} - 6x + 432{,}5 = 0$

(GTR ...)

$x_1 = -9{,}37$ (außerhalb des Definitionsbereichs)

$x_2 = 71{,}635$

$\Rightarrow$ Die Schlange hat sich nach 71,635 Minuten aufgelöst.

e) $h_{neu}(x) = F(x) - a \cdot (x-50)$

Wir benutzen $(x-50)$, da der Kartenverkauf erst um 19:50 beginnt. Gesucht ist a.

Die Schlange soll um 20:30 abgebaut sein, also nach 90 Minuten.

$h_{neu}(90) = 0$

$\Rightarrow F(90) - a \cdot (90-50) = 0$

$312{,}5 - (2{,}25 \cdot 90^2 + 37{,}5 \cdot 90 + 312{,}5) \cdot e^{-0{,}12 \cdot 90} - 90a + 50a = 0$

$312{,}5 - (2{,}25 \cdot 90^2 + 37{,}5 \cdot 90 + 312{,}5) \cdot e^{-0{,}12 \cdot 90} - 40a = 0$

$312{,}053 - 40a = 0$

$-40a = -312{,}053$

$a = 7{,}8$

$\Rightarrow$ Es müssen 7,8 Personen pro Minute sein.

2a) gesucht: Maximum

$f'(x) = 20 \cdot e^{-0{,}5t} + 20t \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0{,}5t}$

$= 20 \cdot e^{-0{,}5t} + (-10t) \cdot e^{-0{,}5t}$

$= (-10t + 20) \cdot e^{-0{,}5t}$

$f''(x) = -10 \cdot e^{-0{,}5t} + (-10t + 20) \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0{,}5t}$

$= -10 \cdot e^{-0{,}5t} + (5t - 10) \cdot e^{-0{,}5t}$

$= (5t - 20) \cdot e^{-0{,}5t}$

N.B.: $f'(x) = 0$

$(-10t + 20) \cdot e^{-0{,}5t} = 0$

$-10t + 20 = 0$ oder $e^{-0{,}5t} = 0$ ↯

$10t = 20$

$t = 2$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(2) = -10 \cdot e^{-1} < 0$

$\Rightarrow$ lok. Max. bei $x = 2$

Ränder:

$f(0) = 0$

$f(2) = 14{,}715$

$f(12) = 0{,}5949$

Das gesuchte Maximum liegt nach 2 h und beträgt 14,715 mg/l.

b) $f(x) = 4$

$20x \cdot e^{-0{,}5x} = 4$

(GTR ...)

$x_1 = 0{,}22366$

$x_2 = 7{,}1543$

Die gesuchte Zeitspanne liegt zwischen 0,22366 h (≈ 13 Minuten) nach der Einnahme bis 7,1543 h nach der Einnahme.

c)

$$m = \frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} f(x)\,dx$$

Erinnerung: mittlerer Funktionswert zwischen $x = a$ und $x = b$:

$$m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

gesucht: Stammfunktion

$$\int_a^b 20x \cdot e^{-0,5x}\,dx = \left[20x \cdot \frac{1}{-0,5} \cdot e^{-0,5x}\right]_a^b - \int_a^b 20 \cdot \frac{1}{-0,5} \cdot e^{-0,5x}\,dx$$

$$= \left[-40x \cdot e^{-0,5x}\right]_a^b - \int_a^b -40 \cdot e^{-0,5x}\,dx$$

$$= \left[-40x \cdot e^{-0,5x}\right]_a^b - \left[\frac{-40}{-0,5} \cdot e^{-0,5x}\right]_a^b$$

$$= \left[-40x \cdot e^{-0,5x}\right]_a^b - \left[80 \cdot e^{-0,5x}\right]_a^b$$

$$= \left[(-40x - 80) \cdot e^{-0,5x}\right]_a^b$$

$$\Rightarrow F(x) = (-40x-80) \cdot e^{-0,5x}$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \left(\left[F(x)\right]_0^{12} \right)$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \left(\left[(-40x-80) \cdot e^{-0,5x}\right]_0^{12} \right)$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \left((-40 \cdot 12 - 80) \cdot e^{-6} - (-80) \cdot e^{0} \right)$$

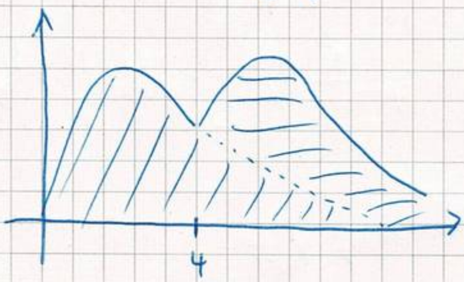
$$= \frac{1}{12} \cdot \left(-560 \cdot e^{-6} + 80 \right)$$

$$= \frac{78,61}{12}$$

$$\approx 6,55$$

Es sind ca. $6,55 \, ^{mg}/_{l}$.

d) Es ergibt sich die folgende Situation:



/// Ergebnis der ersten Einnahme
≡ zusätzl. zweite Einnahme

6 h nach der ersten Einnahme ergibt sich die maximale Konzentration der beim 2. Mal eingenommenen Substanz.
Insgesamt ergibt sich:

$f(2) = 14{,}715 \ \mathrm{mg}/\ell$ (von der 2. Einnahme)

$f(6) = 5{,}974 \ \mathrm{mg}/\ell$ (von der 1. Einnahme)

$\Rightarrow$ insgesamt $20{,}689 \ \mathrm{mg}/\ell$
$\Rightarrow$ Die Vorgabe wird nicht eingehalten.

e) Es muss gelten:

$g(0) = 0$
$g(4) = 10$
$g'(4) = 0$ (Maximum)

$g(x) = a \cdot x \cdot e^{-bx}$
$g'(x) = a \cdot e^{-bx} + ax \cdot (-b) \cdot e^{-bx}$
$= (-abx + a) \cdot e^{-bx}$

$g'(4)=0 \Rightarrow (-4ab+a)\cdot e^{-4b}=0$

$-4ab+a=0$ oder $e^{-4b}=0$

$a\cdot(-4b+1)=0$ ⚡

$a=0$ oder $-4b+1=0$

⚡ $-4b=-1$

$b=0{,}25$

$\Rightarrow g(x)=ax\cdot e^{-0{,}25x}$

$g(4)=10 \Rightarrow 4a\cdot e^{-0{,}25\cdot 4}=10$

$4a\cdot e^{-1}=10$

$\frac{4a}{e}=10$

$4a=10e$

$a=\frac{10}{4}e$

$a=2{,}25e$

$\Rightarrow g(x)=(2{,}25e)\cdot x\cdot e^{-0{,}25x}$

3) a) ① Temperatur 1900

$f(0)=2{,}8\cdot e^{0}-0{,}03\cdot 0+11{,}1$

$=2{,}8+11{,}1$

$=13{,}9$

Es sind 13,9 °C.

② gesucht: Minimum

$f'(t)=0{,}0224\,e^{0{,}008t}-0{,}03$

$f''(t)=0{,}0001792\cdot e^{0{,}008t}$

N.B.: $f'(x)=0$

$$0{,}0224\,e^{0{,}008t}-0{,}03=0$$

$$0{,}0224\,e^{0{,}008t}=0{,}03$$

(GTR...)

$$\boxed{t=36{,}517}$$

H.B.: $f'(x)=0$ und $f''(x)\neq 0$

$$f''(36{,}517)=0{,}0001792\cdot e^{0{,}008\cdot 36{,}517}>0$$

$\Rightarrow$ lok. Min. bei $x=36{,}517$

Ränder:

$$f(0)=13{,}9$$

$$f(36{,}517)=13{,}754$$

$$f(200)=18{,}97$$

Die niedrigste D.temp. liegt im Jahre ≈ 1936 mit $13{,}754$°C.

(III) Überschreiten von 16°C

$$f(x)=16$$

$$2{,}8\cdot e^{0{,}008t}-0{,}03t+11{,}1=16$$

(GTR...)

$$t=152{,}3$$

Es ist im Jahre 2052 der Fall.

(IV) Änderungsrate 2000

gesucht: $f'(100)$

$f'(100)=+0{,}01985$ Grad Cel./Jahr

(V) Mittelwert

$$m = \frac{1}{200} \cdot \int_0^{200} f(x)\,dx$$

gesucht: Stammfunktion

$$\int_a^b 2{,}8 \cdot e^{0{,}008t} - 0{,}03t + 11{,}1 \; dx$$

$$= \left[\frac{2{,}8}{0{,}008} e^{0{,}008t} - \frac{0{,}03}{2} t^2 + 11{,}1t\right]_a^b$$

$$= \left[350 e^{0{,}008t} - 0{,}015 t^2 + 11{,}1t\right]_a^b$$

$$\Rightarrow F(t) = 350\, e^{0{,}008t} - 0{,}015 t^2 + 11{,}1t$$

$$m = \frac{1}{200} \cdot \int_0^{200} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{200} \cdot \left[350 e^{0{,}008t} - 0{,}015t^2 + 11{,}1t\right]_0^{200}$$

$$= \frac{1}{200} \cdot \left(\left(350 \cdot e^{0{,}008 \cdot 200} - 0{,}015 \cdot (200)^2 + 11{,}1 \cdot 200\right) - \left(350 \cdot e^0 - 0{,}015 \cdot 0^2 + 11{,}1 \cdot 0\right)\right)$$

$$= \frac{1}{200} \cdot \left(350 \cdot e^{1{,}6} - 600 + 2220 - 350\right)$$

$$= 15{,}0178$$

Der Mittelwert beträgt ca. 15,02 °C.

b) (1) In welchem Intervall von 10 Jahren steigt die Durchschnittstemperatur um 0,5 °C an?

(II) immer schnellerer Anstieg $\Leftrightarrow f''(x) > 0$

$f''(x) > 0$ bedeutet, dass $f'(x)$ immer größer wird. $f'(x)$ ist aber die Wachstumsgeschwindigkeit

$f''(x) = 0{,}0001792 \cdot e^{0{,}008x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ✓

d) Erinnerung: begrenztes Wachstum

$$g(x) = a + b \cdot e^{-kx}$$

mit a Grenzwert
$a + b$ Anfangsbestand

I. Grenzwert von 16,8°C
$\Rightarrow g(x) = 16{,}8 + b \cdot e^{-kx}$

II. Anfangswert im Jahre 2020:

$f(120) = 14{,}813$

$\Rightarrow a + b = 14{,}813$

$16{,}8 + b = 14{,}813$

$b = -1{,}987$

$\Rightarrow g(x) = 16{,}8 - 1{,}987 \cdot e^{-kx}$

III. ohne Knick: $f'(120) = g'(0)$

$f'(120) = 0{,}0285$

$g'(x) = +1{,}987k \cdot e^{-kx}$

$g'(0) = 1{,}987\,k \cdot e^0 = 1{,}987\,k$

$1{,}987\,k = 0{,}0285$

$k = 0{,}0143$

$\Rightarrow g(x) = 16{,}8 - 1{,}987 \cdot e^{-0{,}0143\,x}$

4) a) ① Maximum

$r'(t) = 10.000 \cdot \left(-0{,}5\,e^{-0{,}5t} - (-1) \cdot e^{-t}\right)$

$= 10.000 \cdot \left(-0{,}5 \cdot e^{-0{,}5t} + e^{-t}\right)$

$r''(t) = 10.000 \cdot \left(0{,}25\,e^{-0{,}5t} - e^{-t}\right)$

N.B.: $r'(t) = 0$

$10.000\,(-0{,}5\,e^{-0{,}5t} + e^{-t}) = 0$

$-0{,}5\,e^{-0{,}5t} + e^{-t} = 0$

(GTR...)

$t = 1{,}386$

H.B.: $r'(t) = 0$ und $r''(t) \neq 0$

$r''(1{,}386) = -1250{,}552$

$\Rightarrow$ Max. bei $t = 1{,}386$

Ränder:

$r(0) = 0$

$r(1{,}386) = 2500$

$r(12) = 24{,}73$

Das Maximum liegt nach 1,386 h mit 2500 l/h.

(II) Zeitraum

$r(x) = 2000$

$10.000 \cdot (e^{-0,5t} - e^{-t}) = 2000$

(GTR...)

$t_1 = 0,647$

$t_2 = 2,572$

Zwischen 0,647h und 2,572h nach Regenbeginn.

(III) stärkste Abnahme $\hat{=}$ Minimum von r'

$r''(t) = 10.000 \cdot (0,25 \cdot e^{-0,5t} - e^{-t})$

$r'''(t) = 10.000 \cdot (-0,125 \cdot e^{-0,5t} + e^{-t})$

N.B.: $r''(t) = 0$

$10.000 \cdot (0,25 e^{-0,5t} - e^{-t}) = 0$

(GTR...)

$t = 2,773$

H.B.: $r''(t) = 0$ und $r'''(t) \neq 0$

$r'''(2,773) = 312,3 > 0$

$\Rightarrow$ Min. bei $t = 2,773$

Ränder:

$r'(0) = 5000 \ \ell/h^2$

$r'(2,773) = -624,99997 \approx -625 \ \ell/h^2$

$r'(12) = -12,3 \ \ell/h^2$

Der gesuchte Zeitpunkt liegt 2,773 h nach Regenbeginn. Die Abnahme liegt bei $-625 \ \ell/h^2$.

b) gesucht: Stammfunktion

$R(t) = 10.000 \cdot (\frac{1}{-0{,}5} e^{-0{,}5t} - \frac{1}{-1} e^{-t}) + c$

$= 10.000 \cdot (-2 e^{-0{,}5t} + e^{-t}) + c$

Am Anfang ist kein Wasser im Tank.

$\Rightarrow R(0) = 0$

$\Rightarrow 10.000 \cdot (-2 \cdot e^{0} + e^{0}) + c = 0$

$10.000 \cdot (-2 + 1) + c = 0$

$10.000 \cdot (-1) + c = 0$

$c = 10.000$

$\Rightarrow R(t) = 10.000(-2 \cdot e^{-0{,}5t} + e^{-t}) + 10.000$

(I) 3 Stunden

$R(3) = 6035{,}267$

Es sind 6035,37 l.

(II) 5000 l

$R(t) = 5000$

$10.000 \cdot (-2 \cdot e^{-0{,}5t} + e^{-t}) + 10.000 = 5000$

(GTR...)

$t_1 = -1{,}07$ (außerhalb des Def. bereichs)

$t_2 = 2{,}4559$

Ab 2,46 h nach Beginn sind 5000 l im Tank.

c) $w(t) = r(t) - 400$

$\uparrow$ Zufluss pro Stunde

$\uparrow$ Entnahme pro Stunde

① Gesamtentnahme

Die Entnahme beginnt nach 3 h.

Sie dauert also 9 h insgesamt.

$$\text{Entnahme} = 9 \cdot 400 = \underline{3600\,\ell}$$

⑪ Abnahme

Die Abnahme beginnt, wenn $w(t) < 0$

$w(t) = 0$

$r(t) - 400 = 0$

$10.000 \cdot (e^{-0,5t} - e^{-t}) - 400 = 0$

(GTR ...)

$t_1 = 0{,}08$ (außerhalb des Def. bereichs)

$t_2 = 6{,}35$

Die Abnahme beginnt nach 6,35 h.

Beweis: $w(6) = 73{,}08 > 0$

$w(7) = -107{,}1 < 0$

$\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel von + nach –

(III) gesucht: Maximum von $W(t)$
(der Stammfunktion von $w(t)$)

N.B.: $w(t)=0$
$t = 6{,}35$ (siehe (II))

H.B.: $w(t)=0$ und $w'(t) \neq 0$
Alternative:
$w(t)=0$ und $w(t)$ Vorzeichenwechsel
(erfüllt, siehe (II))

Ränder:
$W(3) = 4835{,}27$
$W(6{,}35) = 6641{,}58$
$W(12) = 5150{,}486$

$W(t) = R(t) - 400t$
$= 10.000(-2e^{-0{,}5t} + e^{-t}) + 10000 - 400t$

Die maximale Menge beträgt 6641,58 l.