LÖSUNGEN (hilfsmittelfreier Teil)

1) a) $f'(x) = 6 \cdot e^{2x}$

b) $f'(x) = 1 \cdot e^{2x} + (x+2) \cdot 2 \cdot e^{2x}$
$= 1 \cdot e^{2x} + (2x+4) \cdot e^{2x}$
$= (2x+5) \cdot e^{2x}$

c) $f'(x) = 3 \cdot e^{-3x} + (3x+4) \cdot (-3) \cdot e^{-3x}$
$= 3 \cdot e^{-3x} + (-9x-12) \cdot e^{-3x}$
$= (-9x-9) \cdot e^{-3x}$

d) $f'(x) = 2x \cdot e^{-2x} + (x^2+2) \cdot (-2) \cdot e^{-2x}$
$= 2x \cdot e^{-2x} + (-2x^2-4) \cdot e^{-2x}$
$= (-2x^2+2x-4) \cdot e^{-2x}$

e) $f'(x) = (-2x+1) \cdot e^{0{,}5x} + (-x^2+x+1) \cdot 0{,}5 \cdot e^{0{,}5x}$
$= (-2x+1) \cdot e^{0{,}5x} + (-0{,}5x^2+0{,}5x+0{,}5) \cdot e^{0{,}5x}$
$= (-0{,}5x^2-1{,}5x+1{,}5) \cdot e^{0{,}5x}$

f) $f'(x) = 1 \cdot e^{3x-4} + (x) \cdot 3 \cdot e^{3x-4}$
$= (3x+1) \cdot e^{3x-4}$

g) $f'(x) = 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin(x) + e^{2x} \cdot \cos(x)$
$= (2\sin(x) + \cos(x)) \cdot e^{2x}$

h) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin(x^2) + \sqrt{x} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$
$= \frac{\sin(x^2)}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x} \cdot \cos(x^2)$

i) $f'(x) = 2 \cdot (e^{2x}-1) \cdot 2 \cdot e^{2x}$
$= 4e^{2x} \cdot (e^{2x}-1)$
$= 4e^{4x} - 4e^{2x}$

2) a) $f'(x) = 5 \cdot e^{5x}$

$f''(x) = 25 \cdot e^{5x}$

$f'''(x) = 125 \cdot e^{5x}$

$f^{(n)}(x) = 5^n \cdot e^{5x}$

b) $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x$

$f''(x) = 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x = (x+2) \cdot e^x$

$f'''(x) = 1 \cdot e^x + (x+2) \cdot e^x = (x+3) \cdot e^x$

$f^{(n)}(x) = (x+n) \cdot e^x$

c) $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (x^2 + 2x) \cdot e^x$

$f''(x) = (2x+2) \cdot e^x + (x^2+2x) \cdot e^x$

$= (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x$

$f'''(x) = (2x+4) \cdot e^x + (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x$

$= (x^2 + 6x + 6) \cdot e^x$

$f^{(n)}(x) = (x^2 + 2n \cdot x + n \cdot (n-1)) \cdot e^x$

3) a) $F(x) = \frac{2}{3} e^{3x}$

b) $\int_a^b (2x+5) \cdot e^x \, dx = \left[(2x+5) \cdot e^x\right]_a^b - \int_a^b 2e^x \, dx$

$= \left[(2x+5) \cdot e^x\right]_a^b - \left[2e^x\right]_a^b$

$= \left[(2x+3) \cdot e^x\right]_a^b$

$\Rightarrow F(x) = (2x+3) \cdot e^x$

c) $$\int_a^b x\cdot e^{-x}\,dx = \left[x\cdot(-1)\cdot e^{-x}\right]_a^b - \int_a^b (-1)\cdot e^{-x}\,dx$$

$$= \left[-x\cdot e^{-x}\right]_a^b - \left[e^{-x}\right]_a^b$$

$$= \left[(-x-1)\cdot e^{-x}\right]_a^b$$

$$\Rightarrow F(x) = (-x-1)\cdot e^{-x}$$

d) $$\int_a^b (x^2+1)\cdot e^x\,dx = \left[(x^2+1)\cdot e^x\right]_a^b - \int_a^b 2x\cdot e^x\,dx$$

$$= \left[(x^2+1)\cdot e^x\right]_a^b - \left(\left[2x\cdot e^x\right]_a^b - \int_a^b 2\cdot e^x\,dx\right)$$

$$= \left[(x^2+1)\cdot e^x\right]_a^b - \left(\left[2x\cdot e^x\right]_a^b - \left[2\cdot e^x\right]_a^b\right)$$

$$= \left[(x^2+1)\cdot e^x\right]_a^b - \left[2x\cdot e^x\right]_a^b + \left[2\cdot e^x\right]_a^b$$

$$= \left[(x^2-2x+3)\cdot e^x\right]_a^b$$

$$\Rightarrow F(x) = (x^2-2x+3)\cdot e^x$$

e) $$\int_a^b x\cdot e^{2x}\,dx = \left[x\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{2}\cdot e^{2x}\,dx$$

$$= \left[0{,}5x\,e^{2x}\right]_a^b - \left[0{,}25\,e^{2x}\right]_a^b$$

$$= \left[(0{,}5x-0{,}25)\cdot e^{2x}\right]_a^b$$

$$\Rightarrow F(x) = (0{,}5x-0{,}25)\cdot e^{2x}$$

4) a) $f'(x) = 10 \cdot e^{-0,5x} + (10x) \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5x}$

$= 10 \cdot e^{-0,5x} + (-5x) \cdot e^{-0,5x}$

$= (-5x + 10) \cdot e^{-0,5x}$

$f''(x) = -5 \cdot e^{-0,5x} + (-5x + 10) \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5x}$

$= -5 \cdot e^{-0,5x} + (2,5x - 5) \cdot e^{-0,5x}$

$= (2,5x - 10) \cdot e^{-0,5x}$

$f'''(x) = 2,5 \cdot e^{-0,5x} + (2,5x - 10) \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5x}$

$= 2,5 \cdot e^{-0,5x} + (-1,25x + 5) \cdot e^{-0,5x}$

$= (-1,25x + 7,5) \cdot e^{-0,5x}$

b) $f(x) = 0 \iff 10x \cdot e^{-0,5x} = 0 \quad | : e^{-0,5x}$

$10x = 0$

$x = 0$

$\Rightarrow N(0/0)$

c) N.B.: $f'(x) = 0$

$(-5x + 10) \cdot e^{-0,5x} = 0$

$-5x + 10 = 0$ oder $e^{-0,5x} = 0$

$5x = 10$ $\quad$ ↯

$x = 2$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(2) = (2,5 \cdot 2 - 10) \cdot e^{-0,5 \cdot 2}$

$= -5 \cdot e^{-1} < 0$

$\Rightarrow$ loS. Max. bei $x = 2$

$\Rightarrow$ Die gesuchte Extremstelle liegt bei $x = 2$

d) N.B.: $f''(x) = 0$

$$(2{,}5x - 10) \cdot e^{-0{,}5x} = 0$$

$$2{,}5x - 10 = 0 \text{ oder } e^{-0{,}5x} = 0$$

$$2{,}5x = 10 \qquad \lightning$$

$$x = 4$$

H.B.: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

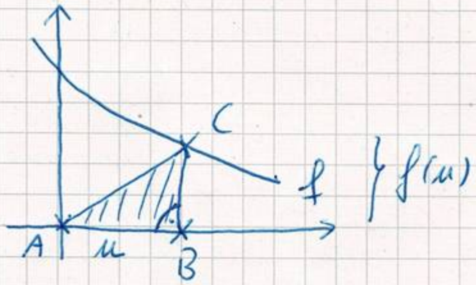
$$f'''(4) = (-1{,}25 \cdot 4 + 7{,}5) \cdot e^{-0{,}5 \cdot 4}$$

$$= 2{,}5 \cdot e^{-2} > 0$$

$\Rightarrow$ WS bei $x = 4$

$\Rightarrow$ Die gesuchte Wendestelle liegt bei $x = 4$

e)



$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{u}_{\text{Länge der Strecke } \overline{AB}} \cdot \underbrace{f(u)}_{\text{Länge der Strecke } \overline{BC}}$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot u \cdot 10u \cdot e^{-0{,}5u}$$

$$= 5u^2 \cdot e^{-0{,}5u}$$

5) a) N.B.: $f'(x) = 0$
(in diesem Fall: $f'(-2) = 0$)
$f'(-2) = 0$ lässt sich aus dem Schaubild ablesen

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$
(über $f''(x)$ keine Informationen da)

Alternative:
$f'(x) = 0$ und Vorzeichenwechsel von $f'(x)$

Es gilt:
$f'(x) > 0$ links von $x = -2$
$f'(x) < 0$ rechts von $x = -2$
$\Rightarrow$ VZW von + nach −
$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $x = -2$

$\Rightarrow$ Aussage richtig

b) N.B.: $f'(x) = 0$
(hier: $f'(2) = 0$)
$f'(2) = 0$ lässt sich dem Schaubild entnehmen

H.B.: $f'(x) = 0$ und VZW von $f'(x)$
$f'(x) < 0$ links von $x = 2$
$f'(x) > 0$ rechts von $x = 2$
$\Rightarrow$ VZW von − nach +
$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $x = 2$

$\Rightarrow$ Aussage richtig

c) streng monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $f(x)$ wächst ohne Pause immer weiter
$\Leftrightarrow$ $f'(x) > 0$ im ganzen Bereich

$f'(x) < 0$ für $-2 < x < 2$
$f'(x) > 0$ für $2 < x < 6$
$\Rightarrow$ Aussage wahr

d) Wendestellen von f sind Extremstellen von f'.
Im Schaubild ist zu sehen, dass f'
ES bei ca. $x = -1$ und $x = 4,5$ hat
$\Rightarrow$ Aussage wahr

6) a) Für $f(x) = x^2 \cdot e^x$ gilt: f hat nur eine Nullstelle.

$$f(x) = 0$$
$$x^2 \cdot e^x = 0 \quad | : e^x$$
$$x^2 = 0$$
$$x = 0$$
$$\Rightarrow N(0/0)$$

Diese Bedingung erfüllt nur Bild 1.
Bild 2 hat gar keine NS, Bild 3 ebenso
und Bild 4 hat zwei NS.

b) Bild 4 muss $f'(x)$ darstellen.
$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (x^2 + 2x) \cdot e^x$

Nullstellen: $(x^2 + 2x) \cdot e^x = 0$
$$x^2 + 2x = 0 \text{ oder } e^x = 0 \quad ↯$$
$$x^2 + 2x = 0$$
$$x(x+2) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = -2$$

Nur Bild 4 zeigt 2 Nullstellen.

Bild 2 zeigt $F(x)$.

$$\int_a^b x^2 \cdot e^x \, dx = \left[x^2 \cdot e^x\right]_a^b - \int_a^b 2x \cdot e^x \, dx$$

$$= \left[x^2 \cdot e^x\right]_a^b - \left(\left[2xe^x\right]_a^b - \int_a^b 2 \cdot e^x \, dx\right)$$

$$= \left[x^2 \cdot e^x\right]_a^b - \left[2x \cdot e^x\right]_a^b + \left[2e^x\right]_a^b$$

$$= \left[(x^2 - 2x + 2) \cdot e^x\right]_a^b$$

$$\Rightarrow F(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$$

$$F(0) = 2 \cdot e^0 = 2$$

Bild 2 ist das einzige, wo $A(0|2)$ auf dem Graphen liegt.

$\Rightarrow$ Bild 3 muss $g(x)$ darstellen.

7) a) $f(x) = 0$

$$2e^{0,5x} - 1 = 0$$

$$2e^{0,5x} = 1$$

$$e^{0,5x} = 0,5 \quad | \ln$$

$$0,5x = \ln(0,5) \quad | \cdot 2$$

$$x = 2 \cdot \ln(0,5)$$

b) Bestimmung der Tangente:

$$t(x) = mx + b$$

$$m = f'(0)$$

$$f'(x) = e^{0,5x}$$

$$f'(0) = e^0 = 1$$

$\Rightarrow t(x) = x + b$

$S(0|1)$ auf $t \Rightarrow t(0) = 1$

$0 + b = 1$

$b = 1$

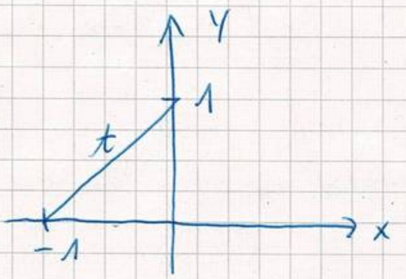
$\Rightarrow t(x) = x + 1$

Bestimmung der Schnittpunkte mit den Achsen:

y-Achse: $t(0) = 1$

x-Achse: $x + 1 = 0$

$x = -1$



Das Dreieck ist gleichschenklig, da die beiden auf den Achsen verlaufenden Seiten jeweils 1 LE lang sind.

8) a) N.B.: $f'(x) = 0$

$f'(x) = x \cdot f(x)$

$f'(0) = 0 \cdot f(x) = 0$ ✓

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(x) = 1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x)$

$= 1 \cdot f(x) + x \cdot (x \cdot f(x))$

$= 1 \cdot f(x) + x^2 \cdot f(x)$

$= (x^2+1)\cdot f(x)$

$f''(0) = 1 \cdot f(0) \neq 0$ nach Voraussetzung

$\Rightarrow$ lokale ES bei $x=0$

b) N.B.: $f''(x) = 0$

$(x^2+1)\cdot f(x) = 0$

$x^2+1 = 0$ oder $f(x) = 0$

$x^2 = -1$ ↯ (nach Voraussetzung

↯

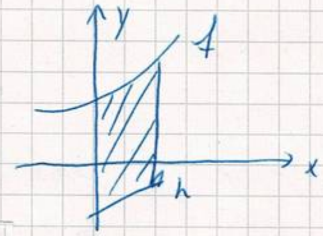
$\Rightarrow$ keine WS möglich

9) a) $e^x + 0{,}5x = 0{,}5x - 1 \quad | -0{,}5x$

$e^x = -1$

↯ $(e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R})$

b)



Abstand zwischen f und h:

$f(x) - h(x)$

$$\int_0^1 f(x) - h(x)\,dx = 3$$

$$\int_0^1 e^x + 0{,}5x - (0{,}5x - c)\,dx = 3$$

$$\int_0^1 e^x + 0{,}5x - 0{,}5x + c\,dx = 3$$

$$\int_0^1 e^x + c\,dx = 3$$

$$\left[e^x + cx\right]_0^1 = 3$$

$$e^1 + c - (e^0 + c \cdot 0) = 3$$
$$e + c - 1 = 3$$
$$\underline{c = -e + 4}$$

10) $f'(x) = k \cdot e^{kx}$

$f'(0) = k \cdot e^{k \cdot 0} = k$

$f'(0) = 2 \Rightarrow \underline{k = 2}$