AUFGABEN
(HILFSMITTELFREIER TEIL)

1) Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 3 \cdot e^{2x}$
b) $f(x) = (x+2) \cdot e^{2x}$
c) $f(x) = (3x+4) \cdot e^{-3x}$
d) $f(x) = (x^2+2) \cdot e^{-2x}$
e) $f(x) = (-x^2+x+1) \cdot e^{0,5x}$
f) $f(x) = x \cdot e^{3x-4}$
g) $f(x) = e^{2x} \cdot \sin(x)$
h) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x^2)$
i) $f(x) = (e^{2x}-1)^2$

2) Bestimme jeweils die erste, zweite und die n-te Ableitung:

a) $f(x) = e^{5x}$
b) $f(x) = x \cdot e^{x}$
c) $f(x) = x^2 \cdot e^{x}$

3) Bestimme eine Stammfunktion:

a) $f(x) = 2 \cdot e^{3x}$
b) $f(x) = (2x+5) \cdot e^{x}$
c) $f(x) = x \cdot e^{-x}$
d) $f(x) = (x^2+1) \cdot e^{x}$
e) $f(x) = x \cdot e^{2x}$

4) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 10x \cdot e^{-0{,}5x}$

a) Bestimme die erste, zweite und dritte Ableitung von f.

b) Bestimme die Nullstelle von f

c) Bestimme die Extremstelle von f
(Auf die y-Koordinate wird verzichtet)

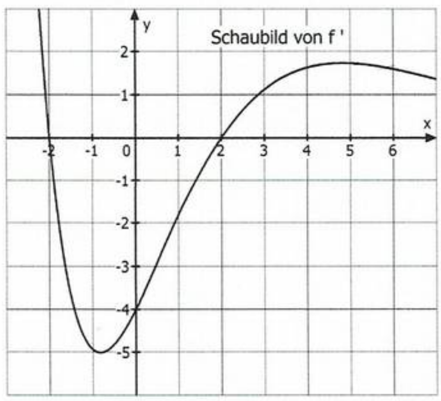
d) Bestimme die Wendestelle von f
(Auf die y-Koordinate wird verzichtet)

e) Für jedes $u > 0$ sind $A(0/0)$, $B(u/0)$ und $C(u/f(u))$ die Eckpunkte eines Dreiecks. Gib den Flächeninhalt des Dreiecks in Abhängigkeit von u an.

5)

Von einer Funktion f ist der Graph seiner Ableitungsfunktion f′ gegeben.

Vorbild: Abitur Baden-Württemberg



Untersuche die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit.

a) Der Graph von f hat an der Stelle x = -2 einen Hochpunkt.
b) Der Graph von f hat an der Stelle x = 2 einen Tiefpunkt.
c) Für 2 < x < 6 ist f streng monoton wachsend.
d) Der Graph von f hat im Intervall -2 < x < 6 genau zwei Wendestellen.

6) Gegeben sind die Schaubilder der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^x$, ihrer Ableitungsfunktion f', einer Stammfunktion F von f und der Funktion g mit $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Vorbild: Abitur Baden-Württemberg

a) Begründen Sie, dass nur Bild 1 das Schaubild der Funktion f sein kann.
b) Ordnen Sie die Funktionen f', F und g den übrigen Schaubildern zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Bild 1

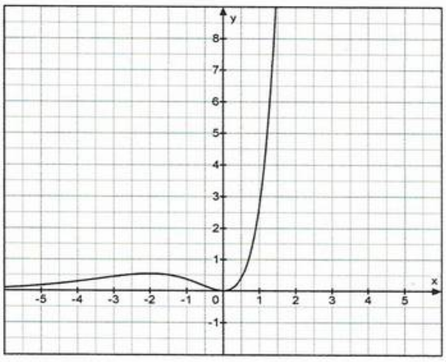


Bild 2

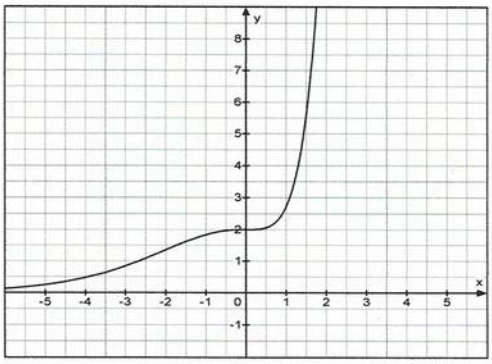


Bild 3

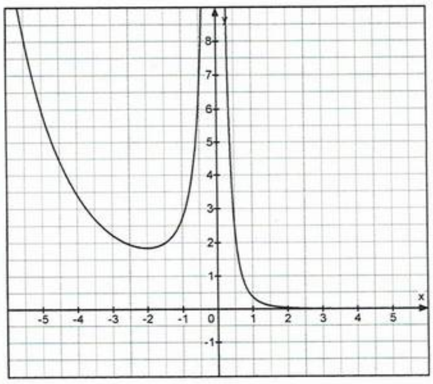
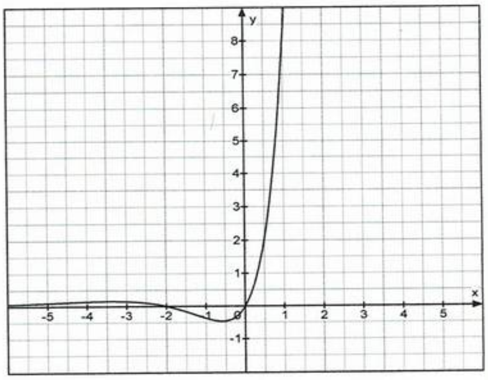


Bild 4



7) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2e^{0,5x} - 1$.
a) Bestimme die Nullstelle von f.
b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weise nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

8) Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem gelte $f'(x) = x \cdot f(x)$.

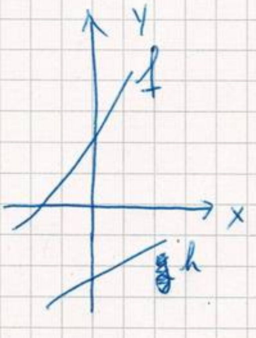
a) Zeige, dass $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ eine lokale Extremstelle hat.

b) Zeige, dass $f(x)$ keine Wendestelle hat.

9) Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{x} + 0{,}5x$

a) Zeige, dass $f(x)$ und $g(x) = 0{,}5x - 1$ keinen gemeinsamen Punkt haben.

b) Wir betrachten die Funktion $h(x) = 0{,}5x - c$. Die Graphen von h und f schließen mit der y-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = 1$ eine Fläche mit dem Inhalt 3 ein. Bestimme c.



10) Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{k \cdot x}$. Sie hat im Schnittpunkt mit der y-Achse die Steigung 2. Welchen Wert hat k?

AUFGABEN
(Teil mit Hilfsmitteln)

1) Die momentane Ankunftsrate an einem Kino, also die Zahl der ankommenden Personen pro Minute, wird beschrieben durch die Funktion
$f(x) = 0{,}27x^2 e^{-0{,}12x}$
Dabei ist x die Zeit in Minuten seit 19 Uhr und $f(x)$ die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute. Vor 19 Uhr befinden sich noch keine Besucher am Kino.

a) Wann kommen die meisten Besucher pro Minute? Um wiel viele Besucher pro Minute handelt es sich?

b) Ab wann kommen weniger als 3 Personen pro Minute zum Kino?

c) Die Funktion $g(x) = 312{,}5 - (2{,}25x^2 + 37{,}5x + 312{,}5) \cdot e^{-0{,}12x}$ beschreibt die Anzahl der bis zum Zeitpunkt x insgesamt angekommenen Personen (mit anderen Worten: die Anzahl der Personen, die insgesamt vor dem Kino warten)

(i) Zeige, dass $g(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

(ii) Wie viele Personen kommen ~~z~~ insgesamt höchstens zum Kino?

d) Um 19:20 Uhr öffnet der Kartenschalter des Kinos. Pro Minute können an 6 Personen Karten ausgegeben werden.

(i) Mit welcher Wartezeit muss eine Person rechnen, die um 19:20 Uhr zum Kino kommt?

(ii) Wann ist die Zahl der Wartenden am größten? Wie viele Personen warten dann?

(iii) Wann hat sich die Warteschlange aufgelöst?

e) Durch eine Verzögerung öffnet der Kartenschalter erst um 19:50 Uhr. Wie viele Personen müssen jetzt mindestens pro Minute am Schalter bedient werden, damit die Warteschlange um 20:30 Uhr abgebaut ist?

(Vorbild: Abitur Baden-Württemberg 2007)

2) Durch $f(t) = 20t \cdot e^{-0{,}5t}$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Dabei wird t in Stunden ab der Einnahme und $f(t)$ in $\frac{mg}{l}$ gemessen. Es gilt: $0 \leq x \leq 12$.

a) Nach welcher Zeit erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert? Wie groß ist dieser höchste Wert?

b) Das Medikament ist nur wirksam, wenn seine Konzentration im Blut mindestens $4 \, mg/l$ beträgt. Bestimme die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist.

c) Wie hoch ist die mittlere Konzentration innerhalb der ersten 12 Stunden?

d) Vier Stunden nach der ersten Einnahme wird das Medikament in der gleichen Dosierung erneut eingenommen. Es wird angenommen, dass sich dabei die Konzentration im Blut addiert.
Die Konzentration des Medikaments im Blut darf 20 $^{mg}/_{l}$ nicht übersteigen. Wird diese Vorgabe eingehalten?

e) Das Medikament wird in seiner Zusammensetzung verändert. Die Konzentration im Blut wird durch $g(t) = a\,t \cdot e^{-bt}$ mit $a>0$ und $b>0$ beschrieben. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $g(t)$ in $^{mg}/_{l}$ gemessen.
Bestimme a und b so, dass die Konzentration vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert 10 $^{mg}/_{l}$ erreicht.

(Vorbild: Abitur Baden-Württemberg 2006)

3) Ein Klimaforscher beschreibt die Entwicklung der globalen Durchschnittstemperatur modellhaft durch die Funktion f mit

$$f(t) = 2{,}8e^{0{,}008t} - 0{,}03t + 11{,}1\ ;\ 0 \le t \le 200$$

Dabei gibt t die Zeit in Jahren seit Beginn des Jahres 1900 und f(t) die globale Durchschnittstemperatur in Grad Celsius an.
Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben anhand dieses Modells.

a) Geben Sie die globale Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 1900 an.
Geben die niedrigste globale Durchschnittstemperatur seit 1900 an.
In welchem Jahr wird die globale Durchschnittstemperatur 16,0°C überschreiten?
Ermitteln Sie die momentane Änderungsrate der globalen Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 2000.
Bestimmen Sie den Mittelwert der globalen Durchschnittstemperatur im durch die Modellierung beschriebenen Zeitraum.

b) Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $f(t+10)-f(t)=0,5$ führt.

Nachdem die globale Durchschnittstemperatur ihren niedrigsten Wert erreicht hat, steigt sie immer weiter an.
Zeigen Sie, dass dieser Anstieg immer schneller verläuft.

c) Es werden Klimaschutzmaßnahmen geplant. Greifen diese zum Zeitpunkt t_0 , so bleibt die momentane Änderungsrate der globalen Durchschnittstemperatur konstant bei dem Wert, der durch das Modell des Klimaforschers für t_0 vorausgesagt wird.
Bestimmen Sie den späteren Zeitpunkt t_0, zu dem die Maßnahmen greifen müssen, damit die globale Durchschnittstemperatur 15,7°C bis zum Beginn des Jahres 2050 nicht überschreiten wird.

d) Infolge alternativer Klimaschutzmaßnahmen kann der Verlauf der globalen Durchschnittstemperatur ab Beginn des Jahres 2020 durch beschränktes Wachstum modelliert werden. Der Graph der zugehörigen Funktion g schließt sich dabei ohne Knick an den Graphen der Funktion f an. Außerdem stellt sich nach diesem neuen Modell langfristig eine globale Durchschnittstemperatur von 16,8°C ein.
Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g.

(Vorbild: Abitur Baden-Württemberg 2018)

4) Ein zunächst leerer Wassertank einer Gärtnerei wird von Regenwasser gespeist.
Nach Beginn eines Regens wird die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion r mit

$$r(t)=10000\cdot\left(e^{-0,5t}-e^{-t}\right)\ ;\ 0\le t\le 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, r(t) in Liter pro Stunde).

a) Bestimmen Sie die maximale Zuflussrate.
In welchem Zeitraum ist diese Zuflussrate größer als 2000 Liter pro Stunde ?
Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab ?

b) Wie viel Wasser befinden sich drei Stunden nach Regenbeginn im Tank ?
Zu welchem Zeitpunkt sind 5000 Liter im Tank ?

c) Zur Bewässerung von Gewächshäusern wird nach 3 Stunden begonnen, Wasser aus dem Tank zu entnehmen. Daher wird die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Tank ab diesem Zeitpunkt durch die Funktion

$$w(t)=r(t)-400\ ;\ 3\le t\le 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, w(t) in Liter pro Stunde).
Wie viel Wasser wird in den ersten 12 Stunden nach Regenbeginn entnommen ?
Ab welchem Zeitpunkt nimmt die Wassermenge im Tank ab ?
Bestimmen Sie die maximale Wassermenge im Tank.

(Vorbild: Abitur Baden-Württemberg 2013)

5)

Wir betrachten einen Deich, der das Ufer gegen Fluten schützen soll. Er besteht aus einem Deichkern und jeweils einer Aufschüttung zur See- und zur Landseite. ~~Die x~~.
Der Deichkern wird durch die Funktion
$f(x) = (x+1) \cdot e^{1,25-x}$, $-1 \leq x \leq 7$ beschrieben.
Dabei steht die x-Achse für den normalen Boden in Meereshöhe und der $f(x)$-Wert gibt die Höhe über dem normalen Boden in m an.

a) Bestimme die höchste Stelle des Deichkerns. Wie viele Meter befindet sich diese über dem normalen Boden?

b) Die Aufschüttung auf der Landseite (hier $x<0$) soll eine Steigung zwischen $1/5$ und $1/10$ haben.
Die Höhe der Aufschüttung kann beschrieben werden durch eine lineare Funktion $g(x)$, die die y-Achse in der Deichkrone (höchste Stelle Deichkern) trifft und den Boden bei $x=-17,5$.

(i) Bestimme die Gleichung von $g(x)$

(ii) Erfüllt die Steigung der Aufschüttung die Voraussetzungen?

c) Zur Seeseite ($x > 0$) hin soll die Aufschüttung vom Wendepunkt des Deichsems aus mit einem Gefälle von $1/7$ aufgebaut werden.

(i) Bestimme eine lineare Funktion, welche die Höhe der Aufschüttung beschreibt.

(ii) In welchem Winkel trifft die Aufschüttung auf den normalen Boden?

d) Ermittle, wie viel m^3 Sand man für 10 m der seeseitigen Aufschüttung benötigt.

(Vorbild: Abitur Hamburg 2006)

6) Die Entwicklung einer Population in den Jahren 1960 bis 2020 lässt sich durch zwei Funktionen modellhaft beschreiben.
Die Funktion g mit $g(t) = 400 + 20 \cdot (t+1)^2 \cdot e^{-0,1t}$ beschreibt die Geburtenrate und die Funktion s mit $s(t) = 600 + 10 \cdot (t-6)^2 \cdot e^{-0,09t}$ beschreibt die Sterberate der Population (t in Jahren seit Beginn des Jahres 1960, g(t) und s(t) in Individuen pro Jahr).

a) Bestimmen Sie die geringste Sterberate.
In welchem Jahr war die Differenz aus Geburten- und Sterberate am größten ?
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die Population zugenommen hat.

b) Zu Beginn des Jahres 1960 bestand die Population aus 20.000 Individuen.
Berechnen Sie den Bestand der Population zu Beginn des Jahres 2017.
In welchem Jahr erreichte die Population erstmals wieder den Bestand von 1960 ?

(Vorbild: Abitur Baden-Württemberg 2015)