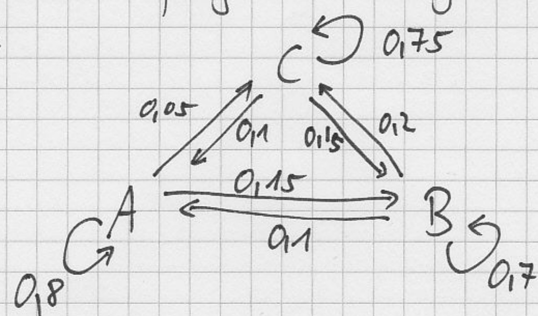
AUFGABEN (TEIL 2: Teil mit Hilfsmitteln)

1) In einer Stadt leben 1200 Personen. Es gibt 3 Supermärkte: A, B und C. In dieser Woche kaufen 470 Personen in A ein, 400 in B und der Rest in C. Das Wechselverhalten von einer Woche zur nächsten kann mit dem folgenden Diagramm beschrieben werden:



a) Beschreibe das Wechselverhalten der Käufer mit einer Übergangsmatrix.

b) Wie verteilen sich die Käufer nächste Woche?

c) Bestimme eine Matrix, mit der man das Wechselverhalten von einer Woche zur übernächsten Woche beschreiben kann.

d) Wie verteilten sich die Käufer in der letzten Woche?

e) Bestimme eine Matrix, mit der man das Wechselverhalten von einer Woche zur vorletzten Woche beschreiben kann.

f) Gibt es eine Verteilung der Käufer, die sich von einer Woche zur nächsten nicht verändert? Wenn ja, dann gib diese an.

Supermarkt C muss am Ende der nächsten Woche wegen Umbavarbeiten für einige Wochen geschlossen werden. 60 % der Käufer von A und B, die in der darauffolgenden Woche in C gekauft hätten, kaufen nun in A, der Rest dieser Käufer kauft in B. Die Käufer, die in C geblieben wären, wechseln zu 50 % zu A und zu 50 % zu B.

g) Beschreibe den Wechsel von der letzten normalen Woche (3 Supermärkte) zur ersten besonderen Woche (2 Supermärkte) mit einer Übergangsmatrix mit 3 Spalten und 2 Zeilen.

h) Wie viele Käufer sind in der ersten besonderen Woche in A und B?

i) Bestimme eine Matrix, mit der man den Wechsel von der vorletzten normalen zur ersten besonderen beschreiben kann.

2) (Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

Auf einer Insel lebt eine Reptilienart mit zwei Entwicklungsstadien:
Ei und ausgeschlüpftes Reptil, im Folgenden kurz als Reptil bezeichnet.
Der Bestand an Reptilien wird halbjährlich gezählt.
Die Entwicklung der Population lässt sich modellhaft beschreiben mithilfe der Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0{,}16 & 1{,}6 \\ 0{,}24 & 0{,}48 \end{pmatrix}$$

Die Populationsvektoren der i-ten Zählung sind $\vec{v_i} = \begin{pmatrix} e_i \\ r_i \end{pmatrix}$, wobei e_i für die Zahl der Eier und r_i für die Zahl der ausgeschlüpften Reptilien steht. Im Modell gilt $\overrightarrow{v_{i+1}} = L \cdot \vec{v_i}$.

a) **Skizzieren** Sie den Übergangsgraphen.
(Übergangsdiagramm)

b) Bei der ersten Zählung ($i = 1$) wurden ca. 600 Reptilien gezählt. Die Eier waren im Sand vergraben, sie wurden nicht gezählt. Es wird geschätzt, dass bei der ersten Zählung ca. 1000 Eier vorhanden gewesen sein könnten.
Berechnen Sie für $e_1 = 1000$ und $r_1 = 600$ den Populationsvektor $\vec{v_2}$.

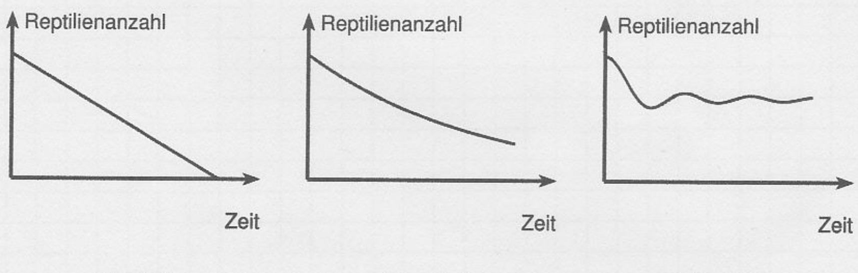
c) **Begründen** Sie aus den Eigenschaften der Matrix heraus:

Je mehr Eier bei der ersten Zählung neben den 600 Reptilien tatsächlich vorhanden waren, desto mehr Eier und Reptilien werden bei der zweiten Zählung vorhanden sein.

d) Bei der zweiten Zählung ($i = 2$) wurden ca. 576 Reptilien gezählt.
Bestätigen Sie mit den Werten $r_1 = 600$ und $r_2 = 576$ den Wert $e_1 = 1200$.
Ermitteln Sie, wie viele Eier zwischen der ersten und zweiten Zählung gelegt wurden.

e) **Bestimmen** Sie den Populationsvektor, der laut Modell ein halbes Jahr vor der ersten Zählung anzunehmen ist. Wählen Sie für Ihre Rechnungen $e_1 = 1200$.

f) Im vorliegenden Modell mit $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 600 \end{pmatrix}$ gilt $L \cdot \vec{v_i} = 0{,}96 \cdot \vec{v_i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Wählen Sie aus, welcher der drei abgebildeten Graphen die langfristige Entwicklung der Reptilienanzahl schematisch richtig wiedergibt.
Begründen Sie zu einem der nicht ausgewählten Graphen, warum er nicht zutreffend sein kann.



Graph I Graph II Graph III

g) Durch ökologische Maßnahmen soll der Anteil der Eier, aus denen ein Reptil schlüpft, von 0,24 auf eine Zahl u erhöht werden, sodass die neue Übergangsmatrix $L^* = \begin{pmatrix} 0{,}16 & 1{,}6 \\ u & 0{,}48 \end{pmatrix}$ eine lebende Population ermöglicht, deren Anzahlen von Eiern und Reptilien sich von einem Zeitschritt zum nächsten nicht ändert.
Bestimmen Sie einen geeigneten Wert von u.

3) (Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

Wölfe leben im Rudelverband. Ein Rudel besteht aus einem Elternpaar, das das Rudel führt, und dessen Nachkommen.
Betrachtet wird die Entwicklung einer Population der weiblichen Tiere eines Wolfsbestands in einem großen, abgeschlossenen Gebiet. Im ersten Lebensjahr werden die Tiere als Welpen und im zweiten als Jungtiere bezeichnet. Ab dem dritten Lebensjahr sind die Tiere geschlechtsreif und werden Rudelführerinnen. Jede Rudelführerin bringt pro Jahr durchschnittlich drei weibliche Welpen zur Welt.
In einem Modell werden Zusammensetzungen der Population der weiblichen Wölfe durch Vektoren der Form $\begin{pmatrix} W \\ J \\ R \end{pmatrix}$ dargestellt, wobei W die Anzahl der Welpen, J die Anzahl der Jungtiere und R die Anzahl der Rudelführerinnen bezeichnet. Zu Beginn der Beobachtung wird die Zusammensetzung der Population durch den Vektor $\vec{v_0}$ dargestellt.
Die Entwicklung der Population von einem Jahr n zum nächsten lässt sich zunächst durch die Matrix $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+1}} = L \cdot \vec{v_n}$ beschreiben.

a) **Stellen** Sie die Entwicklung der Population in einem Übergangsdiagramm dar.

b) **Beschreiben** Sie die Bedeutung von x im Sachzusammenhang.

c) 72 % der Tiere sterben innerhalb der ersten zwei Lebensjahre.
Ermitteln Sie den Wert von x.

Kontrollergebnis: $x = 0{,}4$

d) Zu Beobachtungsbeginn gehören zur Population 39 Rudelführerinnen, ein Jahr später sind es bereits 55.
Bestimmen Sie die Anzahl der Jungtiere zu Beobachtungsbeginn.

Zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn ändern sich die Umweltbedingungen und damit die Entwicklung der Population.
Die Entwicklung kann nun im Zwei-Jahres-Rhythmus, d. h. von einem Jahr zum übernächsten, durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3{,}75 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0{,}24 & 0{,}45 & 0{,}56 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+2}} = M \cdot \vec{v_n}$ beschrieben werden. Sechs Jahre nach Beobachtungsbeginn wird die Zusammensetzung der Population durch den Vektor $v_6 = \begin{pmatrix} 600 \\ 173 \\ 165 \end{pmatrix}$ dargestellt, d. h. die Population besteht aus 938 Tieren.

e) **Bestimmen** Sie die Anzahl der Welpen, Jungtiere und Rudelführerinnen acht Jahre nach Beobachtungsbeginn.

f) Die Vektoren $\overrightarrow{v_{10}} \approx \begin{pmatrix} 2168 \\ 629 \\ 598 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v_{12}} \approx \begin{pmatrix} 4126 \\ 1195 \\ 1138 \end{pmatrix}$ stellen die Zusammensetzungen der Population zehn bzw. zwölf Jahre nach Beobachtungsbeginn dar.
Es gibt für bestimmte Vektoren einen Faktor, der die Zunahme der Anzahlen der Welpen, Jungtiere und Rudelführerinnen von einem Jahr zum nächsten beschreibt.
Zeigen Sie anhand der Vektoren $\overrightarrow{v_{10}}$ und $\overrightarrow{v_{12}}$, dass dieser Faktor für jede der drei Altersgruppen etwa 1,38 beträgt.

g) **Beurteilen** Sie die Beschreibung der Entwicklung der Population durch die Matrix M hinsichtlich ihrer Eignung zur langfristigen Beschreibung der Entwicklung der Population.

4) (Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

Betrachtet werden 3×3-Matrizen N sowie Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, für die $N \cdot \vec{u} = \vec{u}$ gilt.

a) Die Matrix N^{-1} ist die inverse Matrix zu einer der Matrizen N.
Beurteilen Sie ob es einen Wert von $a \in \mathbb{R}$ gibt, für den die Gleichung erfüllt ist:

$(N \cdot N^{-1}) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u}$

b) **Zeigen** Sie für $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, dass $u_2 = u_3$ gilt.

5) (Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

Professor Heise kennt aus Langzeitbeobachtungen die Studentinnen und Studenten des ersten Semesters besser, als sie ahnen:

- 60% derer, die in einer Vorlesung aktiv mitarbeiten, arbeiten auch in der nächsten Vorlesung aktiv mit.
- 40% derer, die an einer Vorlesung nur passiv teilnehmen, nehmen auch an der nächsten Vorlesung nur passiv teil.
- 30% derer, die nicht in eine Vorlesung kommen, kommen auch in die nächste Vorlesung nicht.

Für jede Vorlesung beschreibt Professor Heise die jeweilige Verteilung seiner Studentinnen und Studenten auf die Gruppen „Aktive", „Passive" und „Fehlende" durch einen Vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_P \\ x_F \end{pmatrix}$, wobei

x_A für die Anzahl der aktiven, x_P für die Anzahl der passiven und x_F für die Anzahl der fehlenden Studentinnen und Studenten steht.

Die Entwicklung dieses Vektors von einem Zeitpunkt i einer Vorlesung ($i \in \mathbb{N}$) zum Zeitpunkt $i + 1$ (nächste Vorlesung) modelliert er durch die Gleichung $\vec{s}_{i+1} = M \cdot \vec{s}_i$.

Aufgrund längerer Beobachtungen hat Professor Heise die folgende Übergangsmatrix aufgestellt:

$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$$

a) Zeichne ein Übergangsdiagramm.

In einer Vorlesung zählt Professor Heise, dass von den insgesamt 400 Studentinnen und Studenten nur drei Viertel gekommen sind und dass ein Zehntel der Anwesenden aktiv mitarbeitet.

b) Berechnen Sie die Anzahl der Aktiven und Passiven, die Professor Heise auf Grund seiner Zählung in der nächsten Vorlesung zu erwarten hat.

c)
- Zeigen Sie, dass es keinen realistischen Verteilungsvektor $\vec{s}_r$ der Studentinnen und Studenten geben kann, der sich nach dem vorliegenden Modell von einer Vorlesung zur nächsten exakt reproduzieren würde.
- Ermitteln Sie einen Verteilungsvektor $\vec{s}_r^{\,*}$, der sich nach dem vorliegenden Modell von einer Vorlesung zur nächsten *näherungsweise* reproduzieren würde.

d) Zeige, dass M keine inverse Matrix hat. (rechnerisch ohne GTR)

e) Eines Tages stellt Professor Heise in seiner Vorlesung den folgenden Verteilungsvektor der Studentinnen und Studenten fest:

$$\vec{s}_{n+1} = \begin{pmatrix} 152 \\ 164 \\ 84 \end{pmatrix}$$

In der vorangegangenen Vorlesung hatte Professor Heise seine Studentinnen und Studenten nicht gezählt. Mit Hilfe seiner Modellierung möchte er ausrechnen, wie der Verteilungsvektor der vorigen Vorlesung gewesen sein mag.

- Zeigen Sie, dass jeder Vektor der Form $\vec{s}_n = \begin{pmatrix} t-40 \\ 440-2t \\ t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\vec{s}_{n+1} = M \cdot \vec{s}_n$ erfüllt.
- Ermitteln Sie alle Werte von t, die im Sachkontext der Aufgabe sinnvoll sind.

f) Beurteilen Sie, ob aus der eingangs angegebenen Übergangsmatrix M die folgende Interpretation abgeleitet werden kann: „Wenn in einer Vorlesung 100 Studentinnen bzw. Studenten aktiv waren, werden in der nächsten Vorlesung 60 von diesen Studentinnen bzw. Studenten ebenfalls aktiv sein.“