LÖSUNGEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1a) $f(x) = 10 \cdot 1{,}08^x$, x: Zeit in h ab 9 Uhr

b) 12 min $\triangleq$ 0,2 h

$f(\cancel{4}\,1{,}2) = 10 \cdot 1{,}08^{1{,}2} \approx \underline{10{,}97\ cm^2}$

c) $20 = 10 \cdot 1{,}08^x$

$2 = 1{,}08^x$

$x = \log_{1{,}08}(2) \approx 9{,}006 \underline{\approx 9\,h}$

d) $g(x) = 20 \cdot 1{,}04^x$ x: Zeit in h ab $\underline{10\ Uhr}$

$20 : 1{,}04 \approx 19{,}23$

$\hat{g}(x) = 19{,}23 \cdot 1{,}04^x$, x: Zeit in h ab $\underline{\underline{9\ Uhr}}$

$19{,}23 \cdot 1{,}04^x = 10 \cdot 1{,}08^x$

$1{,}92308 = \frac{1{,}08^x}{1{,}04^x}$

$1{,}92308 = \left(\frac{27}{26}\right)^x$

$x = \log_{\frac{27}{26}}(1{,}92308) \approx 17{,}33$

e) $f(2) = 10 \cdot 1{,}08^2 = 11{,}664$

x	0	1	2
y	8		11,664

$\cdot\ 1{,}458$

$\sqrt{1{,}458} = 1{,}2075$

$\Rightarrow h(x) = 8 \cdot 1{,}2075^{x}$

f) $f(3) = 12{,}59712$

$12{,}59712 : 2 = 6{,}29856$

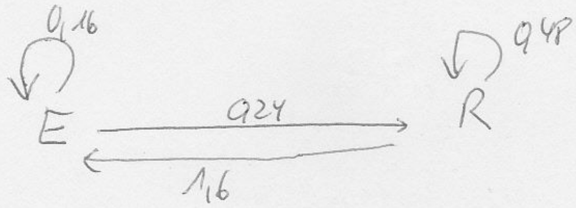
$6{,}29856 \cdot 1{,}08^{x} = 12{,}59712$

$1{,}08^{x} = 2$

$x = \log_{1{,}08}(2)$

$\underline{x \approx 9\ h}$ (vgl. 1c)

2) a)



b)

$$\begin{pmatrix} 0{,}16 & 1{,}6 \\ 0{,}24 & 0{,}48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 + 960 \\ 240 + 288 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1120 \\ 528 \end{pmatrix}$$

c) Es wird mehr Reptilien geben, da 24 % der vorhandenen Eier sich zu Reptilien weiterentwickeln. In diesem Fall würde man 24 % einer größeren Anzahl haben. Es wird auch mehr Eier geben, da 16 % der vorhandenen Eier in diesem Zustand bleiben.

d)

$$\begin{pmatrix} 0{,}16 & 1{,}6 \\ 0{,}24 & 0{,}48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 \\ 576 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0{,}24\, e_1 + 0{,}48 \cdot 600 = 576$$

$$0{,}24\, e_1 + 788 = 576$$

$$0{,}24\, e_1 = 288 \quad | :0{,}24$$

$$\underline{e_1 = 1200}$$

$$0{,}16 \cdot 1200 + 1{,}6 \cdot 600 = e_2$$

$$\underline{1152 = e_2}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 0{,}16 & 1{,}6 \\ 0{,}24 & 0{,}48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 600 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}16 & 1{,}6 & 1200 \\ 0{,}24 & 0{,}48 & 600 \end{array}\right)$$

(GTR...)

$$e_0 = 1250$$

$$r_0 = 625$$

f) Graph $\underline{\text{II}}$ ist Korrekt.

Graph I zeigt eine lineare statt einer exponentiellen Abnahme.

Bei Graph $\underline{\text{III}}$ wächst der Bestand z.T. an, obwohl er ständig abnehmen müsste.

g)

$$\begin{pmatrix} 0{,}16 & \cancel{8}\,1{,}6 \\ u & 0{,}48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0{,}84 & 1{,}6 & 0 \\ u & -0{,}52 & 0 \end{array}\right) \; u \cdot \mathrm{I} + 0{,}84 \cdot \mathrm{II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0{,}84 & 1{,}6 & 0 \\ 0 & 1{,}6u - 0{,}4368 & 0 \end{array}\right)$$

$$1{,}6u - 0{,}4368 = 0$$
$$1{,}6u = 0{,}4368$$
$$\underline{u = 0{,}273}$$

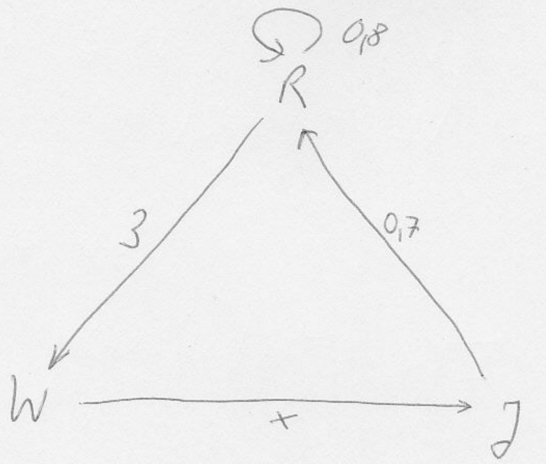
h) Auf Dauer ergibt sich die folgende Entwicklung:

$$\begin{pmatrix} 0{,}382 & 1{,}176 \\ 0{,}201 & 0{,}618 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}779 \\ 0{,}4095 \end{pmatrix}$$

$$0{,}779 + 0{,}4095 = 1{,}1885$$

D.h.: Auf lange Sicht wächst eine Population stets auf 118,85 % ihres Anfangsbestandes an und bleibt dann stabil. Vom Gesamtbestand sind dann $\frac{0{,}779}{1{,}1885} = 65{,}56\,\%$ Eier und 34,44 % Reptilien.

3) a)



b) Welpen, die sich zu Jungtieren weiterentwickeln

c) 72 % sterben $\Rightarrow$ 28 % überleben

$$x \cdot 0{,}7 = 0{,}28$$
$$x = 0{,}4$$

d)

$$R_{neu} = 0{,}8 \cdot R_{alt} + 0{,}7 \cdot J_{alt}$$
$$55 = 0{,}8 \cdot 39 + 0{,}7 \cdot J_{alt}$$
$$55 = 31{,}2 + 0{,}7 \cdot J_{alt}$$
$$23{,}8 = 0{,}7 \cdot J_{alt}$$
$$\underline{34 = J_{alt}}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3{,}75 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0{,}24 & 0{,}45 & 0{,}56 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 173 \\ 165 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1137{,}75 \\ 330 \\ 314{,}75 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1138 \\ 330 \\ 314 \end{pmatrix}$$

f)

$$1{,}38 \cdot \begin{pmatrix} 2168 \\ 629 \\ 598 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4126 \\ 1195 \\ 1138 \end{pmatrix}$$

g)

$$938 \cdot 1{,}38^{t-6} = 45.000$$

$$1{,}38^{t-6} = \frac{45.000}{938}$$

$$t-6 = \log_{1{,}38}\left(\frac{45.000}{938}\right)$$

$$t-6 = 12{,}01759$$

$$t = 18{,}01759$$

Nach 18 Jahren hat man eine Gesamtpopulation von ca. 45.000 Tieren.

h) Nach diesem Modell wächst die Population alle 2 Jahre um 38 %. Damit würde die Population also ungebremst immer weiter wachsen. Das ist unrealistisch, da die Nahrungsreserven im Gebiet irgendwann erschöpft sein müssen.

4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0{,}25 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & -0{,}4 & 0 \end{array}\right) 4 \cdot \underline{II} + \underline{I}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & -0{,}4 & 0 \end{array}\right) 10 \cdot \underline{III} + \underline{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow u_3 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -4u_2 + 4u_3 = 0$

$-4u_2 = -4u_3$

$u_2 = u_3 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow u_2 = u_3$