

LÖSUNGEN (hilfsmittelfreier Teil)

1) a) $x=4$, denn $2^4=16$

b) $x=-3$, denn $(-3)^3=-27$

c) $x=3$, denn $2^3=8$

d) $x=2^5=32$

e) $x=7$, denn $7^2=49$

2) a) $f(x)=10 \cdot 1,2^x$

b) Größe = $10 \cdot 1,2^5$

c) Auflösen der Gleichung

$$25 = 10 \cdot 1,2^x$$

$$2,5 = 1,2^x$$

$$x = \log_{1,2}(2,5)$$

3 a) $f(x)=7 \cdot 2^x$ exponentiell

b) $f(x)=7+2x$ nicht exp.

c)

0	1	2
25	100	400

exponentiell

\swarrow \swarrow
:4 :4

$$f(x)=25 \cdot 4^x$$

d)

0	1	2
100	20	4

\curvearrowright $\cdot 5$ \curvearrowright $\cdot 5$

exponentiell

$$f(x) = 100 \cdot 0,2^x$$

e) $f(x) = 2 \cdot x^2$

nicht exponentiell

4) a) $x=4$, denn $2^4 = 16$

b) $x=4$, denn $3^4 = 81$

c) $x=1$, denn $3^1 = 3$

d) $x=11$, denn $11^2 = 121$

e) $x=3$, denn $a^3 = a^3$

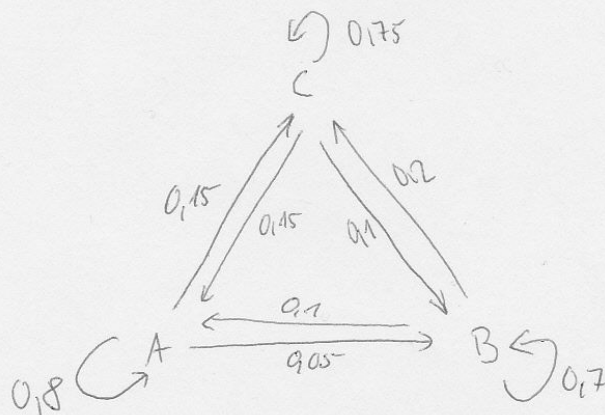
f) $x=7$, denn 3^7 und $\log_3(\Rightarrow)$ heben sich auf

g) $x=20$, denn $3^{20} = 3^{20}$

h) $x=1$, denn $7^0 = 1$

i) $x=144$, denn $144^{\frac{1}{2}} = \sqrt{144} = 12$

5) a)



h)

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,15 \\ 0,05 & 0,7 & 0,1 \\ 0,15 & 0,2 & 0,75 \end{pmatrix}$$

6) a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{array} \right) \underline{\text{II} + \text{III}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow 3x_3 = 3$$

$$x_3 = 1$$

$$\Rightarrow 3x_2 + 1 = -2$$

$$3x_2 = -3$$

$$x_2 = -1$$

$$\Rightarrow -x_1 + 2 - 1 = -1$$

$$-x_1 + 1 = -1$$

$$-x_1 = -2$$

$$x_1 = 2$$

b)

$$a \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 2$$

$$a \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 2$$

$$2a - 4 + 2 = 2$$

$$2a - 2 = 2$$

$$2a = 4$$

$$\underline{a = 2}$$

7)

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,3 \\ a & 0,5 & 0,5 \\ b & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 70 + 21 + 9 \\ 100a + 35 + 15 \\ 100b + 14 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 100a + 50 \\ 100b + 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 100a + 50 &= 70 \\ 100a &= 20 \\ a &= 0,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 100b + 20 &= 30 \\ 100b &= 10 \\ b &= 0,1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Die Spalten ergeben als Summe 1. Es handelt sich also um eine stochastische Matrix.

8) a)

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,64 + 0,12 & 0,48 + 0,24 \\ 0,16 + 0,08 & 0,12 + 0,16 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,76 & 0,72 \\ 0,24 & 0,28 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 + 0,4 \\ 0,1 + 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,64 + 0,16 \\ 0,16 + 0,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ ist ein Fixvektor.

D.h.: $M \cdot \vec{v} = \vec{v}$

$\Rightarrow N$ würde passen zu Abbildung 28

9) a)

$$M = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/2 & 1/10 \\ 0 & 1/6 & 1/10 \\ 6/7 & 1/3 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \boxed{} \\ \dots \end{pmatrix}$ frei wählbar
(Summe der Spalte muss nur 1 ergeben)

b) Spaltensumme von \vec{v} : $a+b$

$$\begin{aligned} \text{Bestimmung von } \vec{w}: \begin{pmatrix} a & t \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a^2 + t b \\ 0 a + (1-t) b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + t b \\ a a + b - t b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Spaltensumme: $a^2 + \cancel{t b} + 0 a + b - \cancel{t b} = a + b$

$\Rightarrow \vec{v}$ und \vec{w} haben dieselbe Spaltensumme

10) a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

	R1	R2	R3	R4
Zustand 0	50	0	0	0
Zustand 1	0	50	0	0
Zustand 2	35	0	15	0
Zustand 3	0	$\frac{35+12}{47}$	0	3
Zustand 4	32,9	0	$\frac{14,1+1,8}{17,9}$	1,2

Abbildung I kann es nicht sein, da jede 2.

Zustand $R_1 = 0$ hat.

Abbildung III kann es nicht sein, da $R_1 \neq 0$ in Zustand 3.

\Rightarrow Abbildung II.

11)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{I-II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) (-1) \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$12) a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 2-2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 4-\beta \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta + 4 - \beta \\ \beta + 4 - \beta \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$13) a) M = \begin{pmatrix} 0,4 & 1 \\ 0,6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0,4 & 1 \\ 0,6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,4 & 1 \\ 0,6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,16 + 0,6 & 0,4 \\ 0,24 + 0 & 0,6 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0,76 & 0,4 \\ 0,24 & 0,6 \end{pmatrix}$$

b) Auf Dauer ergibt sich:

$$x_A = \frac{5}{8} \cdot \text{Gesamtbestand}$$

$$x_B = \frac{3}{8} \cdot \text{Gesamtbestand}$$