AUFGABEN (TEIL MIT HILFSMITTELN)

1) Eine Bakterienkultur hat um 9 Uhr eine Größe von $10\ cm^2$. Sie wächst pro Stunde um 8 %.

a) Beschreibe das Wachstum der Bakterienkultur mit einer Exponentialfunktion.

b) Wie groß ist die Kultur um 10:12 Uhr?

c) Wie lange braucht die Kultur für eine Verdopplung ihrer Größe?

d) Eine zweite Kultur lässt sich mit der Funktion $g(x) = 20 \cdot 1{,}04^x$ beschreiben, wobei x die Zeit in Stunden ab 10 Uhr ist und g(x) die Größe in cm^2.
Wann sind die beiden Kulturen gleich groß?
Welche der beiden Kulturen wächst schneller?

e) Eine dritte Kultur ist um 9 Uhr $8\ cm^2$ groß. Sie wächst schneller als die erste.
Um 11 Uhr ist sie genauso groß wie Kultur 1.
Beschreibe das Wachstum von Kultur 3 mit einer Exponentialfunktion.

f) Um 12 Uhr wird die Hälfte der ersten Kultur durch einen Labortechniker entfernt.
Wie lange braucht sie, um die verlorene Fläche erneut zu bedecken?

2) Reptilien (Aufgabens. Hamburg)

Auf einer Insel lebt eine Reptilienart mit zwei Entwicklungsstadien: Ei und ausgeschlüpftes Reptil, im Folgenden kurz als Reptil bezeichnet. Der Bestand an Reptilien wird halbjährlich gezählt. Die Entwicklung der Population lässt sich modellhaft beschreiben mithilfe der Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0{,}16 & 1{,}6 \\ 0{,}24 & 0{,}48 \end{pmatrix}$$

Die Populationsvektoren der i-ten Zählung sind $\vec{v_i} = \begin{pmatrix} e_i \\ r_i \end{pmatrix}$, wobei e_i für die Zahl der Eier und r_i für die Zahl der ausgeschlüpften Reptilien steht. Im Modell gilt $\overrightarrow{v_{i+1}} = L \cdot \vec{v_i}$.

a) **Skizzieren** Sie den Übergangsgraphen.

b) Bei der ersten Zählung ($i = 1$) wurden ca. 600 Reptilien gezählt. Die Eier waren im Sand vergraben, sie wurden nicht gezählt. Es wird geschätzt, dass bei der ersten Zählung ca. 1000 Eier vorhanden gewesen sein könnten.
Berechnen Sie für $e_1 = 1000$ und $r_1 = 600$ den Populationsvektor $\vec{v_2}$.

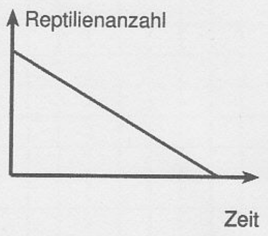
c) **Begründen** Sie aus den Eigenschaften der Matrix heraus:

> Je mehr Eier bei der ersten Zählung neben den 600 Reptilien tatsächlich vorhanden waren, desto mehr Eier und Reptilien werden bei der zweiten Zählung vorhanden sein.

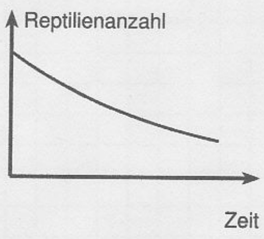
d) Bei der zweiten Zählung ($i = 2$) wurden ca. 576 Reptilien gezählt.
Bestätigen Sie mit den Werten $r_1 = 600$ und $r_2 = 576$ den Wert $e_1 = 1200$.
Ermitteln Sie, wie viele Eier zwischen der ersten und zweiten Zählung gelegt wurden.

e) **Bestimmen** Sie den Populationsvektor, der laut Modell ein halbes Jahr vor der ersten Zählung anzunehmen ist. Wählen Sie für Ihre Rechnungen $e_1 = 1200$.

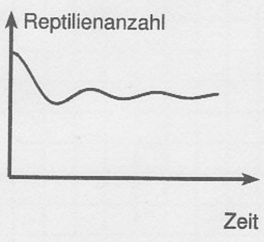
f) Im vorliegenden Modell mit $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 600 \end{pmatrix}$ gilt $L \cdot \vec{v_i} = 0{,}96 \cdot \vec{v_i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Wählen Sie aus, welcher der drei abgebildeten Graphen die langfristige Entwicklung der Reptilienanzahl schematisch richtig wiedergibt.
Begründen Sie zu einem der nicht ausgewählten Graphen, warum er nicht zutreffend sein kann.



Graph I



Graph II



Graph III

g) Durch ökologische Maßnahmen soll der Anteil der Eier, aus denen ein Reptil schlüpft, von 0,24 auf eine Zahl u erhöht werden, sodass die neue Übergangsmatrix $L^* = \begin{pmatrix} 0{,}16 & 1{,}6 \\ u & 0{,}48 \end{pmatrix}$ eine lebende Population ermöglicht, deren Anzahlen von Eiern und Reptilien sich von einem Zeitschritt zum nächsten nicht ändert.
Bestimmen Sie einen geeigneten Wert von u.

h) Die ökologischen Maßnahmen werden durchgeführt, sodass ab $i = 8$ für die nachfolgenden Übergänge eine neue Matrix L^* verwendet werden kann.
Für die neue Übergangsmatrix L^* gilt: $(L^*)^n \approx \begin{pmatrix} 0{,}382 & 1{,}176 \\ 0{,}201 & 0{,}618 \end{pmatrix}$ für alle $n \geq 10$.
Interpretieren Sie mit kurzer Begründung die Matrixeigenschaft, dass sich $(L^*)^n$ für $n \geq 10$ so gut wie gar nicht mehr ändert, im Hinblick auf die weitere Entwicklung der Population.

3) Wölfe (Vorbild: Aufgabens. Hamburg)

Aufgabe 28: Wölfe
WTR-Aufgabe

Wölfe leben im Rudelverband. Ein Rudel besteht aus einem Elternpaar, das das Rudel führt, und dessen Nachkommen.
Betrachtet wird die Entwicklung einer Population der weiblichen Tiere eines Wolfsbestands in einem großen, abgeschlossenen Gebiet. Im ersten Lebensjahr werden die Tiere als Welpen und im zweiten als Jungtiere bezeichnet. Ab dem dritten Lebensjahr sind die Tiere geschlechtsreif und werden Rudelführerinnen. Jede Rudelführerin bringt pro Jahr durchschnittlich drei weibliche Welpen zur Welt.
In einem Modell werden Zusammensetzungen der Population der weiblichen Wölfe durch Vektoren der Form $\begin{pmatrix} W \\ J \\ R \end{pmatrix}$ dargestellt, wobei W die Anzahl der Welpen, J die Anzahl der Jungtiere und R die Anzahl der Rudelführerinnen bezeichnet. Zu Beginn der Beobachtung wird die Zusammensetzung der Population durch den Vektor $\vec{v_0}$ dargestellt.
Die Entwicklung der Population von einem Jahr n zum nächsten lässt sich zunächst durch die Matrix $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+1}} = L \cdot \vec{v_n}$ beschreiben.

a) **Stellen** Sie die Entwicklung der Population in einem Übergangsdiagramm dar.

b) **Beschreiben** Sie die Bedeutung von x im Sachzusammenhang.

c) 72 % der Tiere sterben innerhalb der ersten zwei Lebensjahre.
Ermitteln Sie den Wert von x.

Kontrollergebnis: $x = 0{,}4$

d) Zu Beobachtungsbeginn gehören zur Population 39 Rudelführerinnen, ein Jahr später sind es bereits 55.
Bestimmen Sie die Anzahl der Jungtiere zu Beobachtungsbeginn.

Zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn ändern sich die Umweltbedingungen und damit die Entwicklung der Population.
Die Entwicklung kann nun im Zwei-Jahres-Rhythmus, d. h. von einem Jahr zum übernächsten, durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3{,}75 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0{,}24 & 0{,}45 & 0{,}56 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+2}} = M \cdot \overrightarrow{v_n}$ beschrieben werden. Sechs Jahre nach Beobachtungsbeginn wird die Zusammensetzung der Population durch den Vektor $v_6 = \begin{pmatrix} 600 \\ 173 \\ 165 \end{pmatrix}$ dargestellt, d. h. die Population besteht aus 938 Tieren.

e) **Bestimmen** Sie die Anzahl der Welpen, Jungtiere und Rudelführerinnen acht Jahre nach Beobachtungsbeginn.

f) Die Vektoren $\overrightarrow{v_{10}} \approx \begin{pmatrix} 2168 \\ 629 \\ 598 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v_{12}} \approx \begin{pmatrix} 4126 \\ 1195 \\ 1138 \end{pmatrix}$ stellen die Zusammensetzungen der Population zehn bzw. zwölf Jahre nach Beobachtungsbeginn dar.
Es gibt für bestimmte Vektoren einen Faktor, der die Zunahme der Anzahlen der Welpen, Jungtiere und Rudelführerinnen von einem Jahr zum nächsten beschreibt.
Zeigen Sie anhand der Vektoren $\overrightarrow{v_{10}}$ und $\overrightarrow{v_{12}}$, dass dieser Faktor für jede der drei Altersgruppen etwa 1,38 beträgt.

g) **Bestimmen** Sie die Lösung der Gleichung $938 \cdot 1{,}38^{t-6} = 45000$ mit $t \in [6; +\infty[$.
Interpretieren Sie unter Verwendung der Lösung dieser Gleichung die Zahl 45000 im Sachzusammenhang.

h) **Beurteilen** Sie die Beschreibung der Entwicklung der Population durch die Matrix M hinsichtlich ihrer Eignung zur langfristigen Beschreibung der Entwicklung der Population.

4) (Vorbild: Hamburg)

Betrachtet werden 3×3-Matrizen N sowie Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, für die $N \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Zeigen Sie für $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, dass $u_2 = u_3$ gilt.