AUFGABEN (HILFSMITTELFREIER TEIL)

1) Bestimme x:

a) $2^x = 16$ b) $x^3 = -27$

c) $\log_2(8) = x$ d) $\log_2(x) = 5$

e) $\log_x(49) = 2$

2) Eine Bakterienkultur bedeckt im Moment 10 cm². Sie vergrößert sich jede Stunde um 20 %.

a) Beschreibe das Wachstum mit einer Exponentialfunktion.

b) Wie würde man die Größe der Kultur nach 5 Stunden ausrechnen?

c) Wie würde man ausrechnen, wann die Kultur eine Größe von 25 cm² hat?

3) Handelt es sich um eine Exponentialfunktion? Bestimme die Funktionsgleichung von f:

a)

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	7	14	28	56	112	224

b)

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	7	9	11	13	15	17

c)

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	100	400	1600	6400	25.600	102.400

d)

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	20	4	0,8	0,16	0,032	0,0064

e)

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	2	8	18	32	50

4) Bestimme x:

a) $\log_2(16) = x$

b) $\log_3(81) = x$

c) $\log_3(3) = x$

d) $\log_x(121) = 2$

e) $\log_a(a^3) = x$

f) $3^{\log_3(7)} = x$

g) $\log_3(3^{20}) = x$

h) $\log_7(x) = 0$

i) $\log_x(12) = 0{,}5$

5) In einer Stadt gibt es 3 Supermärkte: A, B und C. Von den Kunden des Supermarktes A sind 80 % in der nächsten Woche auch bei A, 15 % bei C und der Rest bei B.
Von den Kunden von B bleiben 70 % bei B, während 20 % zu C wechseln und 10 % zu A.
Von den Kunden von C bleiben 75 % bei C, während 15 % zu A wechseln und der Rest zu B.

a) Zeichne ein Übergangsdiagramm.
b) Stelle eine Übergangsmatrix auf.

6) (Vorbild: Aufgabensammlung Abitur Hamburg)

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l|rcrcrcr} \text{I.} & -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ \text{II.} & & & 3x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ \text{III.} & & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \end{array}$$

a) **Bestimmen** Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

b) Dem Gleichungssystem soll eine vierte Gleichung der Form $ax_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$ hinzugefügt werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert.
Geben Sie den geeigneten Wert von a **an**.
Begründen Sie Ihre Angabe.

7) (Vorbild: Aufgabensammlung Abi Hamburg)

Ein Fixvektor $\vec{v}$ einer Matrix M ist ein Vektor, für den gilt: $M \cdot \vec{v} = \vec{v}$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Untersuchen Sie, ob es Werte für a und b gibt, sodass für die Matrix

$N = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ a & 0{,}5 & 0{,}5 \\ b & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$ die Bedingungen I und II gelten:

I Der Vektor $\vec{w}$ ist ein Fixvektor der Matrix N.

II Die quadratische Matrix N ist stochastisch, d. h. alle Elemente sind nichtnegative reelle Zahlen und die Spaltensummen sind jeweils gleich eins.

8) (Vorbild: Aufgabensammlung Abi Hamburg)

Eine Anzahl von Objekten verteilt sich auf zwei Zustände A und B.

In den Verteilungsvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ gibt a den Anteil der Objekte im Zustand A an und b den Anteil der Objekte im Zustand B.

a) In einem ersten System wird der Übergang von einer Verteilung zu der folgenden durch eine Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Bestimmen Sie die Matrix, die zwei Übergänge zusammenfasst.

b) In einem zweiten System wird der Übergang von einer Verteilung zu der folgenden durch eine Übergangsmatrix N beschrieben. Die Anfangsverteilung ist $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Die Abbildung 28 stellt die Entwicklung des Anteils im Zustand A für die ersten zehn Übergänge dar.

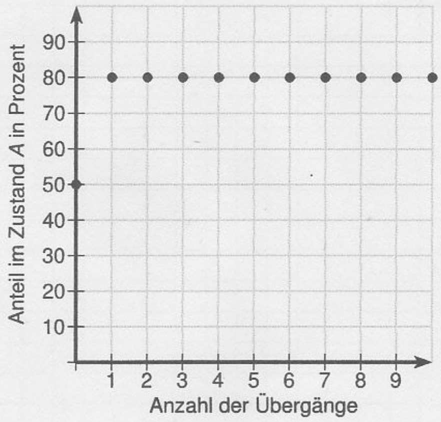


Abb. 28

Begründen Sie, dass $N = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ die zugehörige Übergangsmatrix sein kann.

9) (Vorbild: Aufg.s. Hamburg)

Eine Matrix, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllt, heißt stochastisch.

1. Alle Spaltensummen haben den Wert 1.
2. Kein Matrixelement ist negativ.

a) **Ergänzen** Sie die Leerstellen der Matrix $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & \square \\ 0 & \square & \square \\ \square & \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ durch Zahlen, sodass die Matrix M stochastisch ist.

b) Es sei $N = \begin{pmatrix} 0{,}5 & t \\ 0{,}5 & 1-t \end{pmatrix}$ mit $t \in [0; 1]$ eine stochastische Matrix, $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = N \cdot \vec{v}$.

Entscheiden Sie rechnerisch begründet, ob die beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ dieselbe Spaltensumme haben.

10) (Vorbild: Aufgabensammlung Abi Hamburg)

In einem Labor wird das Wechseln von Ratten zwischen vier miteinander verbundenen Räumen R_1, R_2, R_3 und R_4 beobachtet. Das Wechseln der Ratten von einem Beobachtungszeitpunkt zum nächsten lässt sich durch das abgebildete Übergangsdiagramm beschreiben.

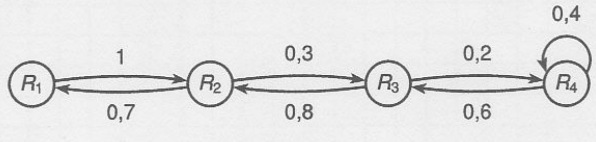
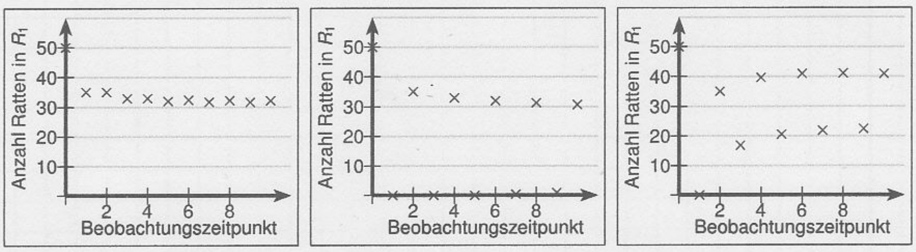


Abb. 29

a) **Geben** Sie eine zugehörige Übergangsmatrix **an**.

b) Zu Beginn einer Beobachtung sind 50 Ratten in R_1, die übrigen drei Räume sind leer. Eine der folgenden Abbildungen beschreibt die zeitliche Entwicklung der Anzahl der Ratten in R_1.



I II III

Geben Sie **an**, um welche Abbildung es sich handelt.

Begründen Sie Ihre Angabe.

11) Bestimme die inverse Matrix von

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12) (Vorbild: Aufgabensammlung Abi Hamburg)

Gegeben sind die Matrix A mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{u}$ mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) **Berechnen** Sie das Produkt $A \cdot \vec{u}$.
Geben Sie zwei von $\vec{u}$ verschiedene Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ **an**, sodass gilt:

$$A \cdot \vec{u} = A \cdot \vec{v} = A \cdot \vec{w}$$

b) **Zeigen** Sie, dass für alle Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ gilt: $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

13) (Vorbild: Aufgabens. Abi Hamburg)

In einem System verteilt sich ein Gesamtbestand auf die Zustände A und B. Die Verteilung wird durch Zustandsvektoren $\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}$ beschrieben. Pro Zeiteinheit finden zwischen den Zuständen die in der Abbildung 27 dargestellten Übergänge statt.

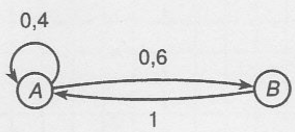


Abb. 27

a) **Geben** Sie die zugehörige Übergangsmatrix M **an**.
Bestimmen Sie die Matrix N, die die Übergänge in zwei aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten zusammenfassend beschreibt.

b) Für große natürliche Zahlen n nähert sich die Potenz M^n der Matrix $G = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.
Beschreiben Sie, welche Folgen sich daraus für die Verteilung des Gesamtbestandes auf die Zustände A und B ergeben.