# LÖSUNGEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1) a) Die Ebene S enthält die Punkte F(8/8/8), $M_1(8/0/4)$ und $M_2(4/0/8)$.

Parametergleichung der Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$

Berechnung des Normalenvektors: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \cdot 0 - (-8) \cdot (-4) \\ -4 \cdot (-4) - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-8) - (-4) \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 16 \\ -32 \end{pmatrix}$

Da auch jeder vielfache Vektor als Normalenvektor verwendet werden kann,

wird als Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ genutzt.

Ansatz für die Koordinatengleichung von S : $2x - y + 2z = d$.
Einsetzen des Punktes F(8/8/8) ergibt $2 \cdot 8 - 8 + 2 \cdot 8 = 24 = d$,

Koordinatengleichung von S: $2x - y + 2z = 24$

Der Abstand des Segeltuches von der Ecke E entspricht dem Abstand der Ebene S vom Punkt E(8/0/8).

$g_h : \vec{OX} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Einsetzen in S:

$2(8+2r) - (-r) + 2(8+2r) = 24$
$16 + 4r + r + 16 + 4r = 24$
$32 + 9r = 24$
$9r = -8$
$r = -\frac{8}{9}$

$\vec{OL} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + (-\frac{8}{9}) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$|\vec{EL}| = \left| -\frac{8}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -16/9 \\ 8/9 \\ -16/9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{256}{81} + \frac{64}{81} + \frac{256}{81}}$
$= \sqrt{\frac{576}{81}}$
$= \frac{24}{9}$
$= \frac{8}{3}$

Das Segeltuch ist etwa 2,7 Meter von der Ecke E entfernt.

b) Das Dreieck $M_1FM_2$ ist gleichschenklig, wenn zwei der drei Seiten gleich lang sind.

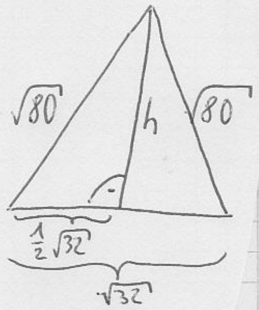
Länge von $M_1F$: $\left|\overrightarrow{M_1F}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\8\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+8^2+4^2} = \sqrt{80}$

Länge von $M_2F$: $\left|\overrightarrow{M_2F}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\8\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2+8^2+0^2} = \sqrt{80}$

Da $\overline{M_1F} = \overline{M_2F}$ ist, ist das Dreieck $M_1FM_2$ gleichschenklig.

Flächeninhalt des Segeltuches: $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot h$

$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2+0^2+4^2} = \sqrt{32}$




Pythagoras

$h^2 = \sqrt{80}^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{32}\right)^2 = 80 - 8 = 72 \Rightarrow h = \sqrt{72}$

$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{72} = 24$

Die Fläche des Segeltuches beträgt 24 m².

Alternative für die Flächenberechnung:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{M_1F} \times \overrightarrow{M_1M_2}\right| \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\8\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}32\\-16\\32\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32^2 + (-16)^2 + 32^2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2304} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 48 \\
&= \underline{24\ m^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cc}
0 & -4 \\
8 & 0 \\
4 & 4 \\
0 & -4 \\
8 & 0
\end{array}
$$

c) Gleichung der Gerade durch A(8/0/0) und C(0/8/0) : g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

Diese Gerade wird nun parallel um 6 nach oben verschoben.
Dies erreicht man damit, dass der Richtungsvektor gleich bleibt und beim Ortsvektor die z-Koordinate um 6 erhöht wird.

Parallele Gerade „auf der Höhe 6“ : h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

Nun wird die Gerade h mit der Segeltuchebene geschnitten.
Der Schnittpunkt L ist der Punkt, in dem die Stange das Segeltuch berührt.

$2(8-8t) - 8t + 2 \cdot 6 = 24 \quad \Rightarrow 16 - 16t - 8t + 12 = 24 \quad \Rightarrow t = \frac{1}{6}$

Einsetzen von t in die Gerade h ergibt den Schnittpunkt $L(\frac{20}{3} / \frac{4}{3} / 6)$

Das untere Ende der Stange befindet sich somit imt Punkt $Z(\frac{20}{3} / \frac{4}{3} / 0)$.

2) a) Geschwindigkeit von $F_1$ entspricht dem Betrag des Richtungsvektors:

$$v = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0,3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2 + 12^2 + 0,3^2} = \sqrt{160,09} \approx 12,65 \text{ km/min}$$

Das Flugzeug erreicht eine Höhe von 4,9 km, wenn gilt:
$x_3 = 3,4 + 0,3t = 4,9 \Rightarrow t = 5$

Um 14.05 Uhr erreicht das Flugzeug eine Höhe von 4,9 km.

b) Gleichung der Flugzeuggerade für $F_2$ : $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3,2 \end{pmatrix} + s \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -18 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3,2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

Der Richtungsvektor wird gedrittelt, damit der Parameter s die Zeit in Minuten angibt: 1 Einheit bei s = 1 min (und nicht 1 Einheit bei s = 3 min)

Berechnung des Schnittpunkts der Flugbahnen:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3,4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3,2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -4t \quad -6s &= -32 \\ 12t \quad +6s &= 48 \\ 0,3t \quad -0,2s &= -0,2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & -6 & -32 \\ 12 & 6 & 48 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & -0{,}2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 3\cdot \mathrm{I} + \mathrm{II} \\ 0{,}3\cdot \mathrm{I} + 4\cdot \mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & -6 & -32 \\ 0 & -12 & -48 \\ 0 & -2{,}6 & -10{,}4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad -12s = -48 \quad \text{und} \quad -2{,}6s = -10{,}4$$
$$s = 4 \quad \text{und} \quad s = 4$$

$$\Rightarrow \quad -4t - 6\cdot 4 = -32$$
$$-4t - 24 = -32$$
$$-4t = -8$$
$$t = 2$$

Lösung des Gleichungssystems: $t = 2$ und $s = 4$.

Einsetzen von $t = 2$ in $g_1$ liefert den Schnittpunkt S(7/30/4)

Der Schnittpunkt S wird von $F_1$ nach $t = 2$ Minuten erreicht und von $F_2$ nach $s = 4$ Minuten erreicht.
Die Sicherheitsbedingung ist also erfüllt.

c) Punkt, zu dem sich $F_1$ zum Zeitpunkt t (in Minuten) befindet:
$A(15-4t\,/\,6+12t\,/\,3{,}4+0{,}3t)$

Punkt, zu dem sich $F_2$ zum Zeitpunkt t (in Minuten) befindet:
$C(-17+6t\,/\,54-6t\,/\,3{,}2+0{,}2t)$

Abstand des Ballons zum Flugzeug $F_1$:
$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(15-4t-6)^2+(6+12t-43)^2+(3{,}4+0{,}3t-4{,}3)^2}$$

Abstand des Ballons zum Flugzeug $F_2$:
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-17+6t-6)^2+(54-6t-43)^2+(3{,}2+0{,}2t-4{,}3)^2}$$

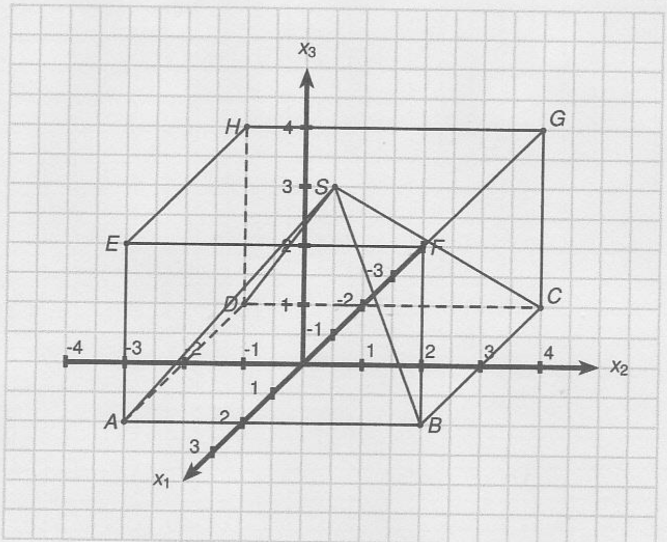
Es soll gelten: $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}|$

$$\sqrt{(15-4t-6)^2+(6+12t-43)^2+(3{,}4+0{,}3t-4{,}3)^2}$$
$$= \sqrt{(-17+6t-6)^2+(54-6t-43)^2+(3{,}2+0{,}2t-4{,}3)^2}$$
$$\sqrt{(9-4t)^2+(-37+12t)^2+(-0{,}9+0{,}3t)^2} = \sqrt{(-23+6t)^2+(11-6t)^2+(-1{,}1+0{,}2t)^2}$$
(...)

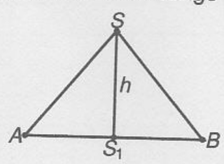
GTR: Die Lösungen lauten $t_0 = 2{,}27$ bzw. $t_0 = 4$.

Verfahren zur Bestimmung der Geradengleichung:
Zunächst werden die Punkte P und Q bestimmt, in denen sich die Flugzeuge zum Zeitpunkt $t_0$ befinden.
Als nächstes wird eine Hilfsebene E aufgestellt, die durch den Punkt B verläuft und deren Normalenvektor $\overrightarrow{PQ}$ beträgt: $\left[\vec{x}-\overrightarrow{OB}\right]\cdot\overrightarrow{PQ}=0$
Diese Hilfsebene enthält sämtliche Punkte, die zum Zeitpunkt $t_0$ von beiden Flugzeugen gleich weit entfernt sind.
Zum Schluss berechnet man die Gleichung der Schnittgeraden von der Ebene E und der x - y -Ebene.

3a)




b) Die Grundfläche der Pyramide ist $A_G = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = 5 \cdot 4 = 20$.
Die Grundseite des Dreiecks *ABS* hat die Länge $|\overrightarrow{AB}| = 5$.




Die Höhe *h* des Dreiecks ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{S_1S}$, wobei $S_1$ die Koordinaten (2|0,5|0) hat.

Dann ist $|\overrightarrow{S_1S}| = \left|\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$.

Damit ergibt sich die Dreiecksfläche $A_{D1}$ zu $A_{D1} = \frac{5\cdot\sqrt{13}}{2} \approx 9{,}01$.
Die Grundseite des Dreiecks *BCS* hat die Länge $|\overrightarrow{BC}| = 4$.

Die Höhe beträgt $\left|\begin{pmatrix}0\\-2{,}5\\3\end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{61}}{2} \approx 3{,}91$.

Damit ergibt sich eine Fläche von $A_{D2} = \frac{\sqrt{61}}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{61} \approx 7{,}81$.
Da die Dreiecke *DCS* und *ABS*, sowie die Dreiecke *ADS* und *BCS* kongruent sind, ergibt sich für die Oberfläche:
$O = 20 + 2 \cdot \left(\frac{5\cdot\sqrt{13}}{2} + \sqrt{61}\right) \approx 53{,}65$
Die Oberfläche der Pyramide beträgt rund 54 cm².

Die Dreiecke sind alle gleichschenklig, da es sich um eine gerade Pyramide handelt.

c) $E: \vec{OX} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AS}$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2,5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2,5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

| | |
|---|---|
| 0 | −2 |
| 5 | 2,5 |
| 0 | 3 |
| 0 | −2 |
| 5 | 2,5 |

$\Rightarrow E: 15x + 10z = d$

Einsetzen des Aufpunkts:

$15 \cdot 2 + 0 = d$

$30 = d$

$\Rightarrow E: 15x + 10z = 30 \quad | :5$

$3x + 2z = 6$

d) Die Kante $\overline{DS}$ wird durch die Gerade

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2,5 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in [0; 1]$ beschrieben.

Es ist also $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2,5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ zu lösen.

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda = 1$ und aus der zweiten $\lambda = 0,8$.

Dies ergibt einen Widerspruch und somit schneidet die Kante $\overline{DS}$ nicht die $x_3$-Achse.

*Alternative:*

$S$ liegt in der yz-Ebene, der Punkt $D$ nicht. Daher kann die Strecke $\overline{DS}$ mit der y-z-Ebene nur den Punkt $S$ gemeinsam haben. $S$ liegt nicht auf der z-Achse, also schneidet die Kante $\overline{DS}$ die $x_3$-Achse nicht.

e)

Der Diamant wird als punktförmig angenommen.
Es ist $K$ der Punkt auf der Kante $\overline{AB}$, in dem der Diamant befestigt wird.
Damit liegt $K$ auf der Geraden $g_1 : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $t = \frac{2}{5}$ oder $t = \frac{3}{5}$.

Dann ist $\overrightarrow{OK_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $\overrightarrow{OK_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die möglichen Koordinaten sind $K_1(2|0|0)$ und $K_2(2|1|0)$.

4)

a) Koordinatengleichung von E:

Parametergleichung der Ebene durch die Punkte A, B, C:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3{,}9 \\ -1{,}3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3{,}9 \\ -1{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6{,}5 \\ 19{,}5 \end{pmatrix}$

Vereinfachung des Normalenvektors zu $\overline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $y + 3z = d$
Einsetzen von A(0/0/4) ergibt sich d = 12.

Koordinatengleichung von E: $y + 3z = 12$

b) Der Regenschutz hat eine Länge von 2,7 Meter ($z$-Koordinate von C).

Die Lampe endet im Punkt L(5/2/0,3).

Der Abstand von L zu C beträgt $\left|\overrightarrow{LC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}9 \\ 2{,}4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1{,}9^2 + 2{,}4^2} \approx 3{,}06\,\text{m} > 2{,}7\,\text{m}$.

Der Regenschutz kann die Stablampe nicht berühren.

Der gesuchte Abstand der Lampe von der Hauswand sei a.

Der Endpunkt der Lampe sei L*(5/a/0,3) mit 0 < a < 4 (aufgrund der Terrassenfläche)

Bedingung, damit der Regenschutz die Lampe nicht berührt: $\overline{L^*C} > 2{,}7$

$$\overline{L^*C} = \left|\overrightarrow{L^*C}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}9 - a \\ 2{,}4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(3{,}9 - a)^2 + 2{,}4^2} > 2{,}7$$

$$\sqrt{15{,}21 - 7{,}8a + a^2 + 5{,}76} = 2{,}7$$

$$\sqrt{20{,}97 - 7{,}8a + a^2} = 2{,}7 \quad |(\,)^2$$

$$20{,}97 - 7{,}8a + a^2 = 7{,}29$$

$$13{,}68 - 7{,}8a + a^2 = 0$$

$$a^2 - 7{,}8a + 13{,}68 = 0$$

$$a = 3{,}9 \pm \sqrt{15{,}21 - 13{,}68}$$

$$a = 3{,}9 \pm \sqrt{1{,}53}$$

$$a = 3{,}9 \pm 1{,}24$$

$$a_1 = 2{,}66$$

$$a_2 = 5{,}14 > 4 \quad ↯$$

Es ergibt sich a < 2,66 m.
Die Lampe darf höchstens 2,66 m von der Hauswand entfernt stehen.

c) Begründung, dass die Terrasse nicht vollständig beschattet wird:

Die y-Koordinate des Vektors $\vec{v}$ ist negativ.
Da die y-Koordinaten der Markisenpunkte C und D kleiner sind als die der Terrassenpunkte R und S reicht der Schatten, den die Markise wirft, nicht bis zur äußeren Terrassenkante RS.

Der Schatten soll bis zum Mittelpunkt der Strecke $\overline{QR}$ reichen, also bis zum Punkt M(5/2/0).

Nun wird eine Hilfsgerade g aufgestellt, die M enthält und den Richtungsvektor $\vec{v}$ besitzt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

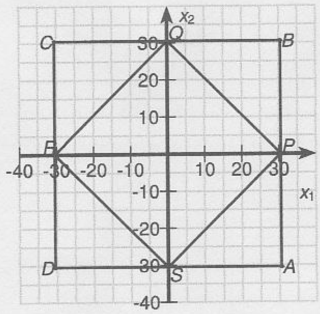
Einen Punkt des Markisenrands in der neuen Position erhält man durch den Schnitt von g mit der Ebene E, in der die Markise liegt:

$2 - t + 3 \cdot (-3t) = 12 \Rightarrow -10t = 10 \Rightarrow t = -1$
Der Schnittpunkt von g mit E lautet S(4/3/3).

Da der gesuchte Eckpunkt C* auf der Kante BC liegt, muss er die x -Koordinate 5 besitzen. Daher ist C*(5/3/3).
Da der gesuchte Eckpunkt D* auf der Kante AD liegt, muss der die x -Koordinate 0 besitzen. Daher ist D*(0/3/3).

5)

**a)**




Projiziert man die Punkte der Deckfläche in die x-y -Ebene, so erhält man

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 30{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30{,}5 \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -30{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30{,}5 \end{pmatrix}$.

*(Die folgende Argumentation wäre auch möglich: Alle Punkte auf der Strecke $\overline{AB}$ haben die $x_1$-Koordinate 30,5. Die y-Koordinate muss zwischen −30,5 und 30,5 liegen. Der projizierte Punkt von P (30,5|0) erfüllt diese Bedingung. Analoge Argumentationen für die anderen Punkte ergeben sich.)*

**b)** Die Längen der Dreiecksseiten ergeben sich mit

$\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30{,}5 \\ 361 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BQ} = \begin{pmatrix} -30{,}5 \\ 0 \\ 361 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -30{,}5 \\ 30{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$

zu $\left|\overrightarrow{BP}\right| = \left|\overrightarrow{BQ}\right| = \sqrt{30{,}5^2 + 361^2} \approx 362{,}3$.

Da $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{30{,}5^2 + 30{,}5^2} \approx 43{,}13$, ist das Dreieck nicht gleichseitig, sondern nur gleichschenklig.

c) $E: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{PB} + s \cdot \overrightarrow{PQ}$

$= \begin{pmatrix} 30{,}5 \\ 0 \\ 361 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 30{,}5 \\ -361 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -30{,}5 \\ 30{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 30{,}5 \\ -361 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -30{,}5 \\ 30{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.010{,}5 \\ 11.010{,}5 \\ 930{,}25 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 0 & -30{,}5 \\ 30{,}5 & 30{,}5 \\ -361 & 0 \\ 0 & -30{,}5 \\ 30{,}5 & 30{,}5 \end{matrix}$$

$\Rightarrow E: 11.010{,}5x + 11.010{,}5y + 930{,}25z = d$

Einsetzen des Aufpunkts:

$11.010{,}5 \cdot 30{,}5 + 930{,}25 \cdot 361 = d$

$671.640{,}5 = d$

$\Rightarrow E: 11.010{,}5x + 11.010{,}5y + 930{,}25z = 671.640{,}5 \quad | : 15{,}25$

$722x + 722y + 61z = 44.042$

d)

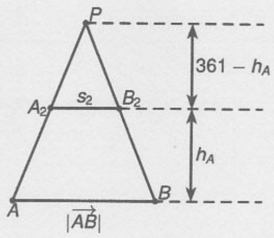
Wegen Aufgabenteil a) liegt das Lot von $P$ in die $x_1$-$x_2$-Ebene auf der Strecke $\overline{AB}$. Analoges gilt für das Lot von $R$ und die Strecke $\overline{DC}$.

$g_1$ und $g_2$ liegen daher in den zueinander parallelen Ebenen $ABP$ bzw. $DCR$, $g_1$ und $g_2$ schneiden sich also nicht.

Da der Vektor $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30{,}5 \\ 361 \end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\overrightarrow{CR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30{,}5 \\ 361 \end{pmatrix}$ ist, sind die beiden Vektoren nicht kollinear, die beiden Geraden also nicht parallel. Also sind sie windschief.

Kollinear sein $\hat{=}$ Vielfaches sein

e)




Es gilt aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke $ABP$ und $A_2B_2P$:

$$\frac{s_2}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{361-h_A}{361}$$

$$s_2 = \frac{361-h_A}{361} \cdot |\overrightarrow{AB}| = \left(1 - \frac{h_A}{361}\right) \cdot |\overrightarrow{AB}|$$

Somit ist $s_2 = \left(1 - \frac{h_A}{361}\right) \cdot |\overrightarrow{AB}|$ gezeigt.

f)

Für ein regelmäßiges Achteck muss gelten $s_1 = s_2$.

$$\frac{h_A}{361} \cdot \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left(1 - \frac{h_A}{361}\right) \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

$$\frac{h_A}{361} \cdot \left|\begin{pmatrix} -30{,}5 \\ 30{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left(1 - \frac{h_A}{361}\right) \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 61 \\ 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$\frac{h_A}{361} \cdot \sqrt{1860{,}5} = \left(1 - \frac{h_A}{361}\right) \cdot 61$$

$$h_A = \frac{61 \cdot 361}{\sqrt{1860{,}5}+61} \approx 211{,}46$$

In einer Höhe von rund 211 m über der Grundfläche des Turms ist die Querschnittfläche nahezu ein regelmäßiges Achteck.