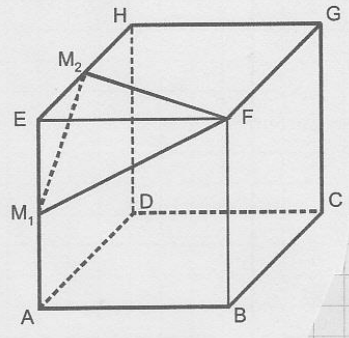
AUFGABEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1) Ausstellungsraum (Vorbild: Musteraufgaben Baden-Württemberg)



In einem würfelförmigen Ausstellungsraum mit der Kantenlänge 8 Meter ist ein dreieckiges Segeltuch aufgespannt. Es ist im Punkt F sowie in den Kantenmitten M_1 und M_2 befestigt (siehe Abb.). Es wird angenommen, dass das Segeltuch nicht durchhängt.
In einem Koordinatensystem stellen die Punkte $A(8|0|0)$, $C(0|8|0)$ und $H(0|0|8)$ die entsprechenden Ecken des Raumes dar.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene S, in der das Segeltuch liegt.
(Teilergebnis: $S: 2x - y + 2z = 24$)

Welchen Abstand hat das Segeltuch von der Ecke E?

b) Zeigen Sie, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Segeltuchs.

c) Auf der Diagonalen AC steht eine 6 Meter hohe Stange senkrecht auf dem Boden. Das obere Ende der Stange berührt das Segeltuch. In welchem Punkt befindet sich das untere Ende der Stange?

2) Flugzeuge (Vorbild: Abitur Baden-Württemberg 2017)

Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 bewegen sich geradlinig mit jeweils konstanter Geschwindigkeit über dem offenen Meer. In einem Koordinatensystem beschreibt dabei die xy-Ebene die Meeresoberfläche. Die Beobachtung der Flugzeuge beginnt um 14.00 Uhr.
Die Flugbahn von F_1 wird beschrieben durch die Gleichung

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3{,}4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} \quad \text{(t in Minuten nach Beobachtungsbeginn)}$$

Der Punkt P(-17/54/3,2) beschreibt die Position von F_2 um 14.00 Uhr, der Punkt Q(1/36/3,8) die Position von F_2 um 14.03 Uhr (1 LE entspricht 1 km)

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit von F_1 in km/min.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem F_1 eine Höhe von 4,9 km erreicht.

b) Die Flugbahnen von F_1 und F_2 schneiden sich.
Aus Sicherheitsgründen müssen die Zeitpunkte, zu denen die Flugzeuge den Schnittpunkt ihrer Flugbahnen durchfliegen, mindestens eine Minute auseinanderliegen.
Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

c) Die Position eines Ballons wird durch den Punkt B(6/43/4,3) beschrieben.
Bestimmen Sie einen Zeitpunkt t_0, zu dem beide Flugzeuge denselben Abstand vom Ballon haben.
Die Punkte auf der Meeresoberfläche, die zum Zeitpunkt t_0 ebenfalls von beiden Flugzeugen gleich weit entfernt sind, liegen auf einer Geraden.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung dieser Geraden bestimmen kann.

3) Designerentwurf (Aufgabensammlung Hamburg)

Ein Designer entwirft mithilfe einer CAD-Software ein Dekorationsobjekt für ein Juweliergeschäft. Das Ausgangsmaterial für das Objekt ist ein Metallquader. Die Eckpunkte des Quaders sind im räumlichen Koordinatensystem:

$A(2|-2|0)$, $B(2|3|0)$, $C(-2|3|0)$, $D(-2|-2|0)$,
$E(2|-2|3)$, $F(2|3|3)$, $G(-2|3|3)$ und $H(-2|-2|3)$.

Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Zentimeter in der Realität (siehe Abbildung 29 in der Anlage).
Der Designer plant zunächst, aus dem gegebenen Quader eine Pyramide *ABCDS* zu konstruieren, deren Spitze bei $S(0|0{,}5|3)$ liegt.

a) **Zeichnen** Sie die Pyramide in ein dreidimensionales Koordinatensystem.

b) Die Oberfläche der Metallpyramide soll vergoldet werden.
Berechnen Sie die Oberfläche der Pyramide.

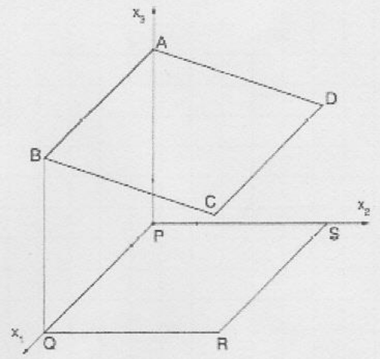
c) **Bestimmen** Sie die Ebenengleichung der Ebene E_1, in der das Dreieck *ABS* liegt, in Koordinatenform.
(Zur Kontrolle: $E_1: 3x + 2z = 6$)

d) **Beurteilen** Sie, ob die Kante $\overline{DS}$ die z-Achse schneidet.

e) Der Designer überlegt, an der unteren Kante $\overline{AB}$ einen kleinen Diamanten zu befestigen, der die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 2 : 3 aufteilt.
Bestimmen Sie die beiden möglichen Positionen des Diamanten.

4) Terrasse (Abitur Baden-Württemberg 2015)

Über einer Terrasse ist als Sonnenschutz eine Markise an einer Hauswand befestigt. In einem Koordinatensystem stellen die Punkte P(0/0/0), Q(5/0/0), R(5/4/0), S(0/4/0) die Eckpunkte der Terrasse dar. Die Markise wird durch das Rechteck mit den Eckpunkten A(0/0/4), B(5/0/4), C(5/3,9/2,7), D(0/3,9/2,7) beschrieben (alle Koordinatenangaben in Meter). Die Lage der Hauswand wird durch die x_1x_3 – Ebene beschrieben.



a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, welche die Lage der Markise beschreibt.

b) In der Mitte zwischen Q und R steht eine 30cm hohe Stehlampe. Am Markisenrand CD wird ein senkrecht nach unten hängender Regenschutz angebracht, der genau bis auf die Terrasse reicht. Bei starkem Wind schwingt er frei um CD.
Kann der Regenschutz dabei die Stehlampe berühren ?
Welchen Abstand von der Hauswand darf die Stehlampe auf der Terrasse höchstens haben, damit dies nicht passiert ?

c) Die Sonne scheint und der Regenschutz wird entfernt. Die Richtung der Sonnenstrahlen wird durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben.
Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Terrasse nicht vollständig beschattet wird.
Die Markise kann ein- und ausgefahren werden. Dabei bewegen sich die äußeren Eckpunkte der Markise längs der Geraden BC und AD. Die Markise wird nun so weit eingefahren, dass der Terrassenrand zwischen Q und R genau zur Hälfte im Schatten liegt.
Bestimmen Sie die neuen Koordinaten der äußeren Eckpunkte der Markise.

5) One World Trade Center (Aufgabensammlung Hamburg)

Der obere Teil des *One World Trade Center* in New York City ist ein Turm. Die Grundfläche dieses Turms lässt sich in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft durch das Quadrat *ABCD* mit

$A(30{,}5|-30{,}5|0)$, $B(30{,}5|30{,}5|0)$, $C(-30{,}5|30{,}5|0)$ und $D(-30{,}5|-30{,}5|0)$

beschreiben (siehe Abbildung 31 in der Anlage).

Die Eckpunkte der quadratischen Deckfläche *PQRS* des Turms haben die Koordinaten

$P(30{,}5|0|361)$, $Q(0|30{,}5|361)$, $R(-30{,}5|0|361)$ und $S(0|-30{,}5|361)$.

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.

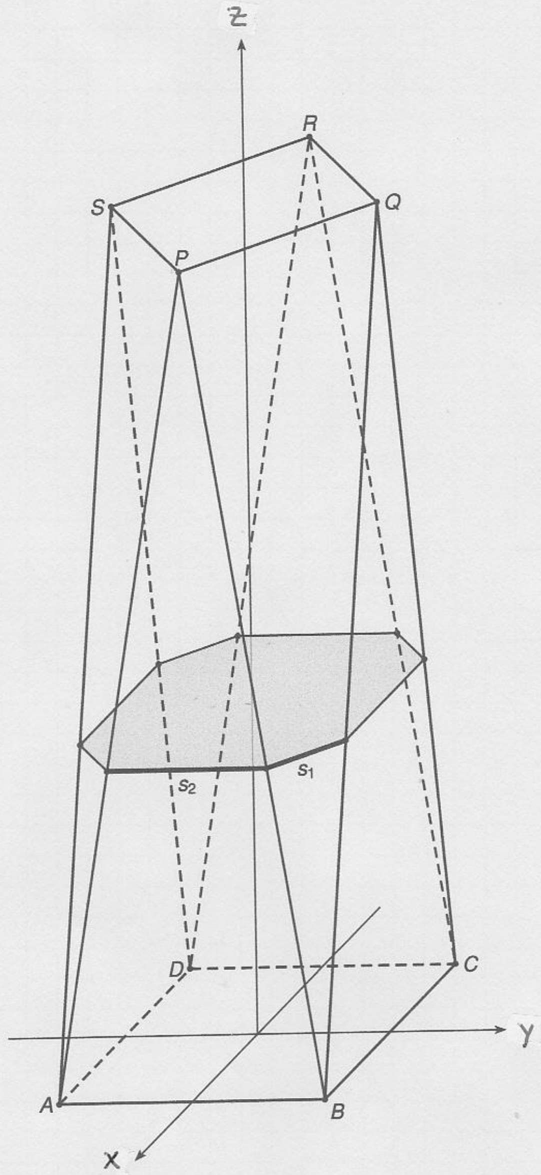


Abb. 31: Das Schrägbild des Turmes. Die Skizze ist nicht maßstabsgetreu.

a) **Zeichnen** Sie die Draufsicht des Turms, also die senkrechte Projektion in die x_1-x_2- Ebene. **Zeigen** Sie, dass die Eckpunkte der projizierten Deckfläche auf den Seiten der Grundfläche liegen.

senkrechte Projektion: - Außerachtlassen des z-Werts

- z-Wert wird gleich 0 gesetzt

b) Die Grund- und die Deckfläche des Turms sind durch ein umlaufendes Band von Dreiecken verbunden (siehe Abbildung 31 in der Anlage).
Bestätigen Sie, dass die Außenwand PBQ ein gleichschenkliges, aber kein gleichseitiges Dreieck ist.

c) Die Seitenfläche PBQ liegt in einer Ebene E.
Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.
(Zur Kontrolle: Es ist $E: 722x_1 + 722x_2 + 61x_3 = 44042$.)

d) Die Kante $\overline{AP}$ liegt auf einer Geraden g_1 und die Kante $\overline{CR}$ liegt auf einer Geraden g_2.
Begründen Sie, dass die Geraden g_1 und g_2 windschief zueinander liegen.

Die Querschnittsfläche des Turms in der Höhe h_A über der Grundfläche ist ein Achteck, in dem genau zwei verschiedene Seitenlängen s_1 und s_2 vorkommen. Dabei sind gleiche Seitenlängen nicht benachbart (siehe Abbildung 30 und Abbildung 31 in der Anlage).

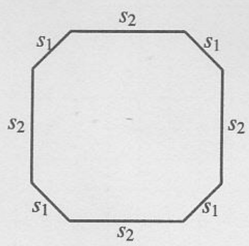


Abb. 30: Achteck mit den Kanten s_1 und s_2.

Für die eine Seitenlänge s_1 gilt $s_1 = \frac{h_A}{361} \cdot \left|\overrightarrow{PQ}\right|$.

e) **Zeigen** Sie anhand einer geeigneten Skizze, dass für die andere Seitenlänge s_2 gilt:

$$s_2 = \left(1 - \frac{h_A}{361}\right) \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

f) **Ermitteln** Sie, in welcher Höhe über der Grundfläche die Querschnittsfläche die Form eines regelmäßigen Achtecks hat.