AUFGABEN (Hilfsmittelfreier Teil)

1) Gegeben seien die Punkte $A(1/0/0)$, $B(1/2/1)$ und $C(3/1/1)$. Sie liegen auf einer Ebene E.

a) Bestimme für die Ebene jeweils eine Gleichung in Parameterform, Normalenform und Koordinatenform.

Kontrollergebnis: $E: x + 2y - 4z = 1$

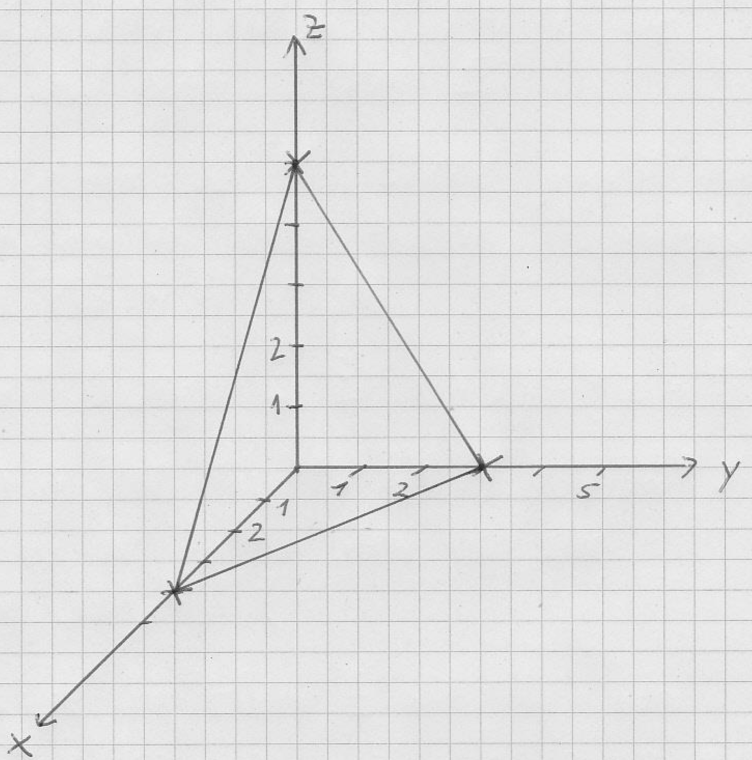
b) Spiegle den Punkt $D(4/0/6)$ an E. Welche Koordinaten hat der Bildpunkt D'?

c) Zeichne die Ebene E mit Hilfe von Spurpunkten bzw. Spurgeraden in ein dreidimensionales Koordinatensystem.

d) Bestimme die Gleichung einer Ebene in Koordinatenform, welche parallel zu E ist und in der der Punkt D liegt.

e) Gegeben sei die Gerade $g: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimme ihren Schnittpunkt S mit der Ebene E.

2) Bestimme eine Gleichung in Koordinatenform für die nachfolgend dargestellte Ebene E:



3) Gegeben sind die Ebenen $E_1: 6x - y - 4z = 12$ und $E_2: -3x + 5y + 2z = -6$.

a) Begründe, dass die Ebenen E_1 und E_2 nicht identisch sind.

b) Bestimme die Koordinaten eines Punktes, der in beiden Ebenen liegt.

c) In der Gleichung von E_2 soll genau ein Vorfaktor auf der linken Seite so geändert werden, dass eine Gleichung von E_1 entsteht. Welche Änderung sollte man machen und warum?

4) (Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

Gegeben sind der Punkt $P(-3|2|1)$, die Gerade $g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ sowie für eine reelle Zahl a der Punkt $Q(0|a|0)$. Die Strecke $\overline{PQ}$ steht senkrecht zu g.

a) **Bestimmen** Sie den Wert von a.

b) Zwei Werte r_1 und r_2 des Parameters r liefern die Ortsvektoren zweier Punkte R_1 und R_2 der Geraden g.
Geben Sie alle Wertepaare $(r_1; r_2)$ an, für die R_1 und R_2 den gleichen Abstand vom Punkt Q haben.
Begründen Sie Ihre Angabe.

5) (Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c_t} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}$ spannen für jeden Wert von t mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ einen Körper auf. Die Abbildung 21 zeigt den Sachverhalt beispielhaft für einen Wert von t.

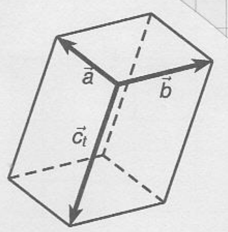


Abb. 21

a) **Zeigen** Sie, dass die aufgespannten Körper Quader sind.

b) **Bestimmen** Sie diejenigen Werte von t, für die der jeweils zugehörige Quader das Volumen 15 besitzt.

6) Gib die Gleichungen von drei beliebigen Ebenen an, die sich paarweise jeweils in einer Schnittgeraden schneiden. Es soll keinen Schnittpunkt für alle drei Ebenen geben.

7) Gegeben sind die Ebenen $E_1: 2x - 2y + z = 1$ und $E_2: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Zeige, dass die Ebenen echt parallel zueinander sind.

b) Die Ebene E_3 ist parallel zu E_1 und E_2 und hat von beiden Ebenen denselben Abstand. Bestimme eine Gleichung von E_3.

8) Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(1/-1/3)$ und $B(2/-3/0)$. Die Ebene E wird von g orthogonal geschnitten und enthält den Punkt $C(4/3/-8)$. Bestimme den Schnittpunkt von g und E.

9) (Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

Gegeben ist die Ebene $E: 2x + y - 2z = -18$.

a) Der Schnittpunkt von E mit der x-Achse, der Schnittpunkt von E mit der y-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

b) **Ermitteln** Sie einen Vektor, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punkts der Ebene E ist.

10) (Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

Das Dreieck ABC mit den Punkten $A(3|3|3)$, $B(6|7|3)$ und $C(2|10|3)$ ist im Punkt B rechtwinklig und liegt in der Ebene mit der Gleichung $z = 3$.

a) **Weisen** Sie **nach**, dass das Dreieck ABC den Flächeninhalt $\frac{25}{2}$ besitzt. **(2 BE)**

b) **Bestimmen** Sie die Koordinaten eines Punkts D so, dass das Volumen der Pyramide $ABCD$ gleich 25 ist. **(3 BE)**

11) (Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

Gegeben sind die Ebene $E: 2x + y + 2z = 6$ sowie die Punkte $P(1|0|2)$ und $Q(5|2|6)$.

a) **Zeigen** Sie, dass die Gerade durch die Punkte P und Q senkrecht zur Ebene E verläuft.

b) Die Punkte P und Q liegen symmetrisch zu einer Ebene F.
Ermitteln Sie eine Gleichung von F.

symmetrisch $\hat{=}$ Wenn man P an F spiegelt, so erhält man Q

(Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

12) Betrachtet wird der abgebildete Würfel $ABCDEFGH$. Die Eckpunkte D, E, F und H dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten: $D(0|0|-2)$, $E(2|0|0)$, $F(2|2|0)$ und $H(0|0|0)$.

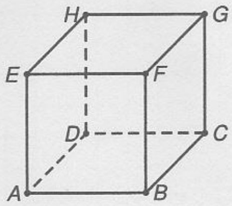


Abb. 23

a) **Zeichnen** Sie in die Abbildung 23 die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes A **an**.

b) Der Punkt P liegt auf der Kante $\overline{FB}$ des Würfels und hat vom Punkt H den Abstand 3.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P.

13) Gib die Gleichungen von zwei beliebigen Geraden an, die echt parallel zueinander sind.

14) (Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ und die Geraden

$h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -a \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot a + 3 \\ 2 \\ 1 + a \end{pmatrix}$ $(s \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R})$.

a) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den die Richtungsvektoren von g und h_a zueinander senkrecht sind.

b) Weisen Sie nach, dass sich für $a = -2$ die Geraden g und h_a schneiden.