LÖSUNGEN (Hilfsmittelfreier Teil)

1) a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 5-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 5-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 1-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 5-5 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow$ ABCD Parallelogramm

b) Test auf Orthogonalität:

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -3+2 = -1 \neq 0$

$\Rightarrow$ kein Rechteck, da der Winkel bei A kein rechter Winkel ist

c)

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$

$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

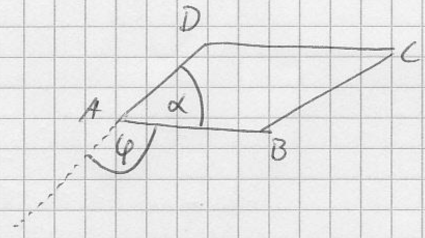
d) $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= -8 + 16 - 3$

$\neq 0$

$\Rightarrow$ Kein rechter Winkel

e)



Es würde gelten:

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|}$$

Wenn ein Vektor durch seinen Gegenvektor ersetzt wird, so erhält man den Nebenwinkel von α.

2) a) C (0/10/0)

C hat denselben x-Wert wie D, denselben y-Wert wie B und liegt in der xy-Ebene

E (8/0/8)

E hat denselben x- und y-Wert wie A und denselben z-Wert wie F

G (0/10/8)

G hat denselben x- und y-Wert wie C und denselben z-Wert wie F.

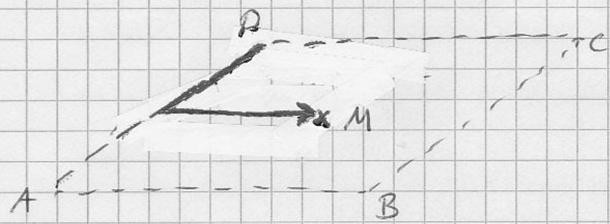
Bitte beachten: Der Quader liegt mit seiner Bodenfläche ABCD genau in der xy-Ebene und die Kanten $\overline{AD}$ und $\overline{DC}$ und $\overline{DH}$ liegen auf den Koordinatenachsen.
In diesem Fall kann man die Koordinaten relativ einfach ablesen von den gegebenen Punkten.

b) $\overrightarrow{OM}_{ABCD} = \overrightarrow{OD} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DA} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DC}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M_{ABCD}\ (4/5/0)$

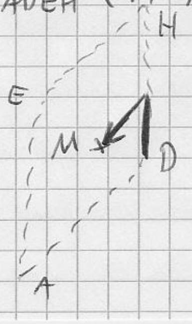


$\overrightarrow{OM}_{ADEH} = \overrightarrow{OD} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DH} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DA}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M_{ADEH}\ (4/0/4)$

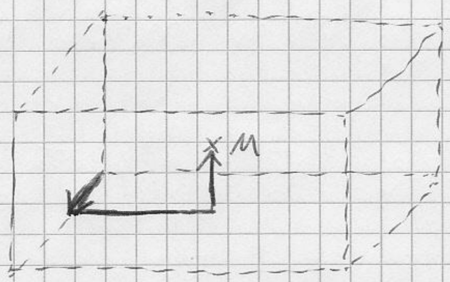


c) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DA} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DC} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DH}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

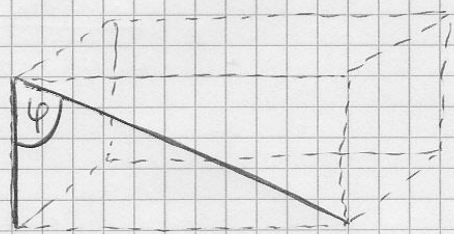
$\Rightarrow M(4/5/4)$



d) Der Quader ist rechtwinklig.

$V = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AE}|$
$= 8 \cdot 10 \cdot 8$
$= 640$ VE

e)



f)

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|}$$

3) A (3/2/-1); B (3/6/-1); C (1/6/-1);
D (1/2/-1); E (3/2/2); F (3/6/2);
G (1/6/2)

Zu berücksichtigen ist:
① Wegen Parallelität gilt $\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{EF} = \vec{HG}$
bzw. $\vec{AD} = \vec{BC} = \vec{EH} = \vec{FG}$
② Weil die Vierecke ABCD und EFGH parallel zur xy-Ebene sind, gilt: A und E, B und F, C und G sowie D und H haben jeweils dieselben x- und y-Werte. Die Punkte oben haben denselben z-Wert, ebenso die Punkte unten.

E (3/2/2) hat dieselben x- und y-Werte wie A und denselben z-Wert wie H

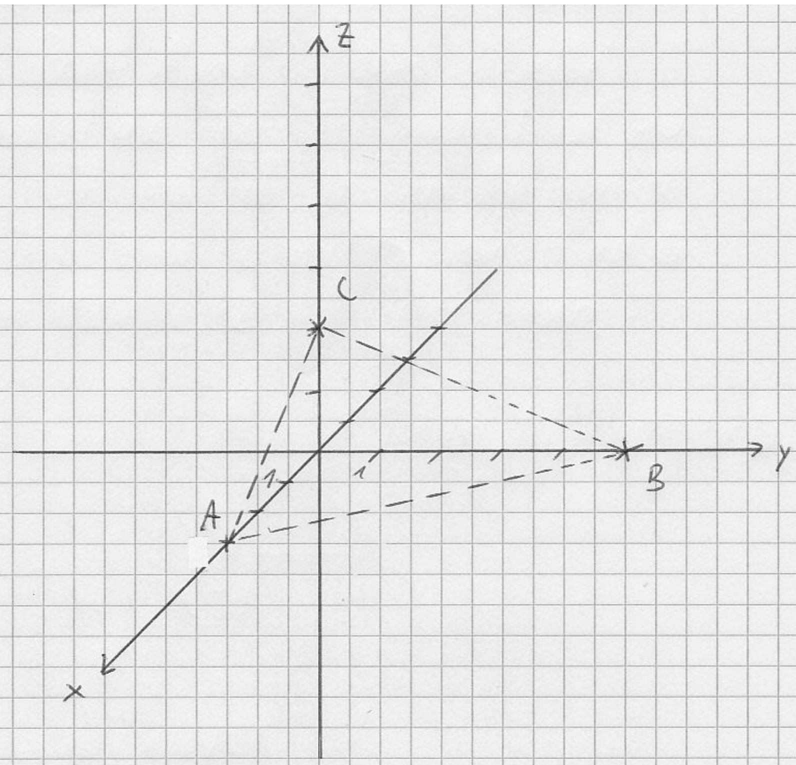
F (3/6/2) hat dieselben x- und y-Werte wie B und denselben z-Wert wie H

G (1/6/2) ergibt sich durch $\vec{OG} = \vec{OH} + \vec{HG}$
$= \vec{OH} + \vec{AB}$

C (1/6/-1) hat dieselben x- und y-Werte wie G und denselben z-Wert wie A

D (1/2/-1) hat dieselben x- und y-Werte wie H und denselben z-Wert wie A

4) a)



b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Winkel α: $\vec{AB} \circ \vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 90°$

Winkel β: $\vec{BA} \circ \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 25 \neq 0 \Rightarrow \beta \neq 90°$

Winkel γ: $\vec{CA} \circ \vec{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \gamma \neq 90°$

Es ist kein rechtw. Dreieck

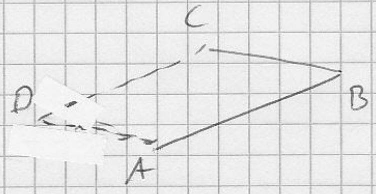
c) $|\vec{AB}| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ LE

$|\vec{AC}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ LE

$|\vec{BC}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$ LE

Es ist kein gleichschenkliges Dreieck.

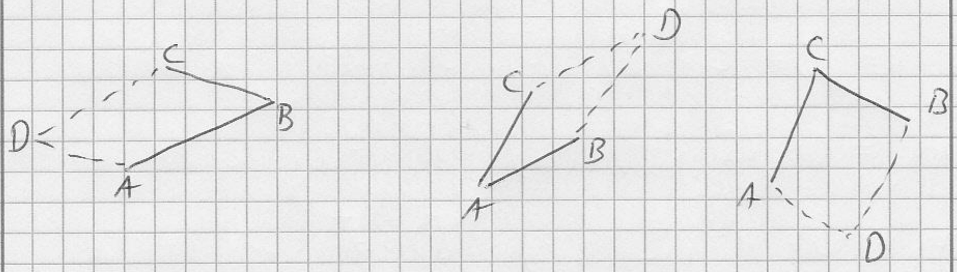
d)



$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$
$$= \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-5\\2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow D(3|-5|2)$$

e) Wenn die Reihenfolge der Punkte beibehalten werden soll, nur eine.

Ansonsten gäbe es drei:



5)
$$r \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\7\\12\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} r & s \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 17 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2\cdot \mathrm{I} - \mathrm{II} \\ 3 \cdot \mathrm{I} - \mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 17 \\ 0 & 9 & 27 \\ 0 & 13 & 39 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 9s = 27$ und $13s = 39$

$\Rightarrow s = 3$

$\Rightarrow r + 5 \cdot 3 = 17$

$r + 15 = 17$

$r = 2$

$$\Rightarrow 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

6) $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 5x + 2 - 6 = 0$

$5x - 4 = 0$

$5x = 4$

$x = 0{,}8$

7) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = x + 1 + 3z = 0$

$x + 3z = -1$

Wir wählen $x = 2$

$\Rightarrow 2 + 3z = -1$

$3z = -3$

$z = -1$

$\Rightarrow$ Eine Möglichkeit wäre $x = 2$; $z = -1$

andere Möglichkeiten:

$x = 3 \Rightarrow 3 + 3z = -1$ | $x = 4 \Rightarrow 4 + 3z = -1$

$3z = -4$ | $3z = -5$

$z = -\frac{4}{3}$ | $z = -\frac{5}{3}$

8) $\vec{a} \circ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$= a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_3$

$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ (linke Seite)

$(|\vec{a}|)^2 = \left(\left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| \right)^2$

$= \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \right)^2$

$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ (rechte Seite)

$\Rightarrow$ linke Seite = rechte Seite

q.e.d.

9a) $4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \vec{x} = (-5) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \vec{x}$

$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} - 3 \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} + 3 \cdot \vec{x} \quad \Big| + 3 \cdot \vec{x}$

$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} + 6 \cdot \vec{x} \quad \Big| - \begin{pmatrix} -15 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 23 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \cdot \vec{x} \quad \Big| \cdot \frac{1}{6}$

$\begin{pmatrix} 23/6 \\ 9/6 \\ 2/6 \end{pmatrix} = \vec{x}$

$\begin{pmatrix} 23/6 \\ 3/2 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \vec{x}$

b) $$2 \cdot \left(5 \cdot \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,5 \\ -0,3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1,25 \\ -2,5 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + 2\vec{x} = 5 \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right) - \vec{x}$$

$$2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 0,5 \\ 2,5 \\ -1,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}\right) + 2\vec{x} = 5 \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ -15 \end{pmatrix} - \vec{x}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -4,5 \\ 12,5 \\ -5,5 \end{pmatrix} + 2\vec{x} = 4 \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -9 \\ 25 \\ -11 \end{pmatrix} + 2\vec{x} = 4\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ -15 \end{pmatrix} \quad \Big| + \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 50 \\ -26 \end{pmatrix} + 2\vec{x} = 4\vec{x} \quad \Big| - 2\vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 50 \\ -26 \end{pmatrix} = 2\vec{x} \quad \Big| \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 25 \\ -13 \end{pmatrix} = \vec{x}$$

10) $$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{DC} = \begin{pmatrix} c_1 - d_1 \\ c_2 - d_2 \\ c_3 - d_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow \begin{cases} \text{I. } b_1 - a_1 = c_1 - d_1 \\ \text{II. } b_2 - a_2 = c_2 - d_2 \\ \text{III. } b_3 - a_3 = c_3 - d_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{I. } b_1 - a_1 - c_1 = -d_1 \\ \text{II. } b_2 - a_2 - c_2 = -d_2 \\ \text{III. } b_3 - a_3 - c_3 = -d_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{I. } -b_1 + a_1 + c_1 = d_1 \\ \text{II. } -b_2 + a_2 + c_2 = d_2 \\ \text{III. } -b_3 + a_3 + c_3 = d_3 \end{cases}$$

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} d_1 - a_1 \\ d_2 - a_2 \\ d_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 + a_1 + c_1 - a_1 \\ -b_2 + a_2 + c_2 - a_2 \\ -b_3 + a_3 + c_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 + c_1 \\ -b_2 + c_2 \\ -b_3 + c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \\ c_3 - b_3 \end{pmatrix} = \vec{BC}$$

q.e.d.

11) a) Die Aussage ist wahr, da im Rechteck gegenüberliegende Seiten parallel sind.

b) Die Aussage ist wahr, da im Quadrat gegenüberl. Seiten parallel sind.

c) Ein Quadrat ist sowohl ein Parallelogramm als auch ein gleichsch. Trapez. Die Aussage ist wahr.

d) Die Aussage ist wahr. Benachbarte Seiten sind gleich lang.

e) Die Aussage ist wahr.
Bsp: