Lösungen (Aufgaben mit Hilfsmitteln)

1) a) $P_1\,(0/4)$
$P_2\,(2/10)$

$f(x) = b \cdot a^x$

$P_1(0/4)$ liegt auf $f \Rightarrow f(0) = 4$
$\Rightarrow b = 4$
$\Rightarrow f(x) = 4 \cdot a^x$

$P_2(2|10)$ liegt auf $f \Rightarrow f(2) = 10$
$\Rightarrow 4 \cdot a^2 = 10 \quad | :4$
$a^2 = 2{,}5 \quad | \sqrt{\ }$
$a \approx 1{,}5811$

$\Rightarrow f(x) = 4 \cdot 1{,}5811^x$
$= 4 \cdot e^{\ln(1{,}5811) \cdot x}$
$= 4 \cdot e^{0{,}4581\,x}$

Alternative:

$P_1(0|4)$
$P_2(2|10)$

$f(x) = b \cdot e^{\ln(a) \cdot x}$

$P_1(0|4)$ liegt auf $f \Rightarrow f(0) = 4$
$\Rightarrow b = 4$
$\Rightarrow f(x) = 4 \cdot e^{\ln(a) \cdot x}$

$P_2(2|10)$ liegt auf f $\Rightarrow f(2) = 10$

$$\Rightarrow 4 \cdot e^{\ln(a)\cdot 2} = 10 \quad | :4$$

$$e^{\ln(a)\cdot 2} = 2{,}5 \quad | \ln$$

$$\ln(a)\cdot 2 = \ln(2{,}5) \quad | :2$$

$$\ln(a) = \frac{\ln(2{,}5)}{2} \approx 0{,}4581$$

$$\Rightarrow f(x) = 4 \cdot e^{0{,}4581x}$$

b) $A(3|y)$

$$y = 4 \cdot e^{0{,}4581 \cdot 3} \approx 15{,}81$$

$$\Rightarrow A(3|15{,}81)$$

$B(x|3)$

$$3 = 4 \cdot e^{0{,}4581x} \quad | :4$$

$$0{,}75 = e^{0{,}4581x} \quad | \ln$$

$$\ln(0{,}75) = 0{,}4581x \quad | :0{,}4581$$

$$\frac{\ln(0{,}75)}{0{,}4581} = x$$

$$-0{,}63 \approx x$$

$$\Rightarrow B(-0{,}63|3)$$

c) $f(x) = 4 \cdot e^{0{,}4581x}$

$$f'(x) = 4 \cdot 0{,}4581 \cdot e^{0{,}4581x}$$

$$= 1{,}8324 \cdot e^{0{,}4581x}$$

$$f''(x) = 1{,}8324 \cdot 0{,}4581 \cdot e^{0{,}4581x}$$

$$\approx 0{,}8394 \cdot e^{0{,}4581x}$$

$$f^{(n)}(x) = 4 \cdot (0{,}4581)^n \cdot e^{0{,}4581x}$$

d) Die Ableitung gibt an, wie steil ein Graph ansteigt. Da die steilste Stelle gesucht wird, wird nach dem Maximum der Ableitung gesucht.

N.B.: $f''(x) = 0$

$$0{,}8394 \cdot e^{0{,}4581x} = 0$$

$$\Large\unicode{8623}$$

Exponentialfunktionen haben keine Nullstellen

Ränder: $f'(0) = 0{,}8394$

$f'(1) = 0{,}8394 \cdot e^{0{,}4581} \approx 1{,}3271$

Antwort: Die gesuchte Stelle liegt bei $x = 1$.

e)

$$A = \int_0^1 4 \cdot e^{0{,}4581x}\,dx = \left[\frac{4}{0{,}4581} \cdot e^{0{,}4581x}\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{0{,}4581} \cdot e^{0{,}4581} - \frac{4}{0{,}4581} \cdot e^{0}$$

$$= 13{,}8054 - 8{,}7317$$

$$= \underline{5{,}0737 \text{ FE}}$$

f) $4 \cdot e^{0,4581x} = 8 \cdot e^{-0,4x} \quad |:4$

$e^{0,4581x} = 2 \cdot e^{-0,4x} \quad |: e^{-0,4x}$

$(e^{-0,4x} \neq 0)$

$$\frac{e^{0,4581x}}{e^{-0,4x}} = 2$$

$e^{0,4581x + 0,4x} = 2$

$e^{0,8581x} = 2 \quad | \ln$

$0,8581x = \ln(2) \quad |:0,8581$

$x = \frac{\ln(2)}{0,8581}$

$x \approx 0,8078$

y-Wert: $f(0,8078) = 4 \cdot e^{0,4581 \cdot 0,8078}$

$= 5,7912$

$\Rightarrow S(0,81/5,79)$

g) $4 \cdot e^{0,4581x} = 4x + 4 \quad |:4$

$e^{0,4581x} = x + 1 \quad |-x \ |-1$

$e^{0,4581x} - x - 1 = 0$

(Taschenrechner...)

$x_1 = 0$

$x_2 = 3,0571$

y-Werte: $h(0) = 4 \cdot 0 + 4 = 4$

$h(3,0571) = 4 \cdot 3,0571 + 4 = 16,2284$

$\Rightarrow S_1(0/4), \ S_2(3,0571/16,2284)$

h)

$$A = \int_0^{3,0571} h(x) - f(x)\, dx = \int_0^{3,0571} 4x + 4 - 4 \cdot e^{0,4581x}\, dx$$

$$= \left[2x^2 + 4x - \frac{4}{0,4581} \cdot e^{0,4581x} \right]_0^{3,0571}$$

$$= 2 \cdot (3,0571)^2 + 4 \cdot 3,0571 - \frac{4}{0,4581} \cdot e^{0,4581 \cdot 3,0571}$$

$$- \left(2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - \frac{4}{0,4581} \cdot e^0 \right)$$

$$\approx 18,6917 + 12,2284 - 35,4251 - (-8,7317)$$

$$= \underline{4,2267 \text{ FE}}$$

---

2) a) $f(0) = 10$ Es sind $10\ cm^2$.

b) $f(4) = 10 \cdot e^{0,2 \cdot 4} = 10 \cdot e^{0,8} \approx 22,2554$

Es sind $\approx 22,26\ cm^2$.

c) $f(x) = 24$

$$10 \cdot e^{0,2x} = 24 \quad | :10$$

$$e^{0,2x} = 2,4 \quad | \ln$$

$$0,2x = \ln(2,4) \quad | :0,2$$

$$x = \frac{\ln(2,4)}{0,2}$$

$$x \approx 4,3773$$

Die Kultur ist nach ≈ 4 h 23 min insgesamt 24 cm^2 groß.

d) $20 = 10 \cdot e^{0,2x} \quad | :10$

$2 = e^{0,2x} \quad | \ln$

$\ln(2) = 0,2x \quad | :0,2$

$\frac{\ln(2)}{0,2} = x$

$3,4657 \approx x$

Die Verdopplung erfolgt nach ca. 3 h 28 min.

e) $10 \cdot e^{0,2x} = 4 \cdot e^{0,7x} \quad | :4$

$2,5 \cdot e^{0,2x} = e^{0,7x} \quad | :e^{0,2x}$
$(e^{0,2x} \neq 0)$

$2,5 = \frac{e^{0,7x}}{e^{0,2x}}$

$2,5 = e^{0,7x - 0,2x}$

$2,5 = e^{0,5x} \quad | \ln$

$\ln(2,5) = 0,5x \quad | :0,5$

$\frac{\ln(2,5)}{0,5} = x$

$1,8326 \approx x$

Das Überholen erfolgt nach ca. 1 h 50 min

f) $f'(x) = 10 \cdot 0{,}2 \cdot e^{0{,}2x}$
$= 2 \cdot e^{0{,}2x}$

Diese Funktion gibt an, mit welcher Geschwindigkeit die Kultur wächst.

Erinnerung:

$$\underset{\text{Größe}}{f(x)} \longrightarrow \underset{\text{Geschwindigkeit}}{f'(x)} \longrightarrow \underset{\text{Beschleunigung}}{f''(x)}$$

g) $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 10 \cdot e^{0{,}2x}\,dx = \left[\frac{10}{0{,}2} \cdot e^{0{,}2x}\right]_0^2$

$= \left[50 \cdot e^{0{,}2x}\right]_0^2 = 50 \cdot e^{0{,}4} - 50 \cdot e^0$

$= 74{,}59 - 50$

$\underline{= 24{,}59}$

h) $f(5) = 10 \cdot e^{0{,}2 \cdot 5} = 10 \cdot e \approx 27{,}1828$

nach der Reduzierung: $15{,}1828 \text{ cm}^2$

neue Funktion: $i(x) = b \cdot e^{0{,}2x}$
Der Term $e^{0{,}2x}$ bleibt, da es sich um den Wachstumsfaktor a^x handelt und die Geschwindigkeit dieselbe bleibt.

$P(5/15{,}1828)$ liegt auf i $\Rightarrow$ $i(5) = 15{,}1828$

$$15{,}1828 = b \cdot e^{0{,}2 \cdot 5}$$
$$15{,}1828 = b \cdot e \quad | :e$$
$$\frac{15{,}1828}{e} = b$$
$$5{,}5854 \approx b$$

$$\Rightarrow i(x) = 5{,}5824 \cdot e^{0{,}2x}$$

Wann ist der Verlust ausgeglichen?

$$27{,}1828 = 5{,}5824 \cdot e^{0{,}2x} \quad | :5{,}5824$$
$$4{,}8694 = e^{0{,}2x} \quad | \ln$$
$$\ln(4{,}8694) = 0{,}2x \quad | :0{,}2$$
$$\frac{\ln(4{,}8694)}{0{,}2} = x$$
$$7{,}9149 \approx x$$

verstrichener Zeitraum:
$$7{,}9149 - 5 = 2{,}9149$$

Es handelt sich um $\approx$ 2 h 55 min, bis der Verlust ausgeglichen wurde.

i) Teil I: bis $x = 5$

$$2x + 12 = 10 \cdot e^{0,2x} \quad | :10$$
$$0,2x + 1,2 = e^{0,2x} \quad | -0,1x - 1,2$$
$$0 = e^{0,2x} - 0,2x - 1,2$$

(Taschenrechner...)

$x_1 = -3,5338$
$x_2 = 2,8612$

Teil II: ab $x = 5$

$$2x + 12 = 5,5824 \cdot e^{0,1x} \quad | -2x \;| -12$$
$$0 = 5,5824 \cdot e^{0,2x} - 2x - 12$$

(Taschenrechner...)

$x_1 = -4,9662$ ← außerhalb des betrachteten Bereichs
$x_2 = 8,0972$

Sie hat dieselbe Größe nach ca. 2 h 52 min und 8 h 9 min und vor 3 h 32 min.

---

3) a) Schnittpunkt mit y-Achse:

$f(0) = 24$
$\Rightarrow S_y(0|24)$

Schnittpunkte mit x-Achse:

$f(x) = 0$
$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$

(Taschenrechner...)

$x_1 = -3$
$x_2 = 2$
$x_3 = 4$

Die gesuchten Punkte sind $P_1(0/24)$, $P_2(-3/0)$, $P_3(2/0)$ und $P_4(4/0)$.

l) Notw. Bed.: $f'(x)=0$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 10$

$3x^2 - 6x - 10 = 0$

(TR ...)

$x_1 = -1{,}08$

$x_2 = 3{,}08$

Hinr. Bed.: $f'(x)=0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(-1{,}08) = 6 \cdot (-1{,}08) - 6 < 0$

$\Rightarrow$ Max. bei $x = -1{,}08$

$f''(3{,}08) = 6 \cdot 3{,}08 - 6 > 0$

$\Rightarrow$ Min. bei $x = 3{,}08$

Ränder:

$f(-4) = -48$

$f(-1{,}08) = 30{,}04$

$f(3{,}08) = -6{,}04$

$f(5) = 24$

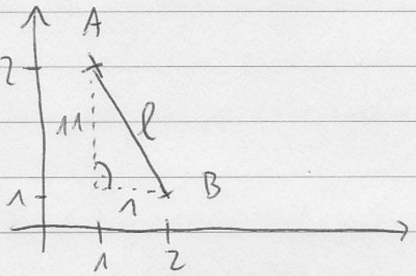
Die nördlichste Stelle ist $P_1(-1{,}08/30{,}04)$ und die südlichste $P_2(-4/-48)$.

c) zu untersuchen: $f(1) = 12$?

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 24 = 12$ ✓

Ja, der Fluss fließt durch die Stadt.

d)



Satz v. Pythagoras:

$l^2 = 11^2 + 1^2$

$l^2 = 121 + 1$

$l^2 = 122$

$\Rightarrow l \approx 11{,}05$ km

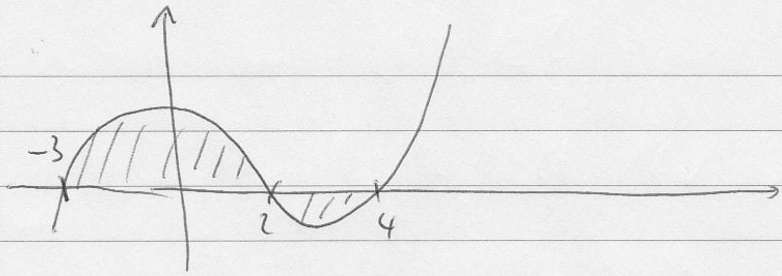
e) $\displaystyle\int_{-3}^{2} x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \, dx - \int_{2}^{4} x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \, dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 5x^2 + 24x\right]_{-3}^{2} - \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 5x^2 + 24x\right]_{2}^{4}$

$= \left(24 - (-69{,}75)\right) - \left(16 - 24\right)$

$= 93{,}75 + 8$

$= 101{,}75$



Damit rechnet man die Fläche zwischen
Fluss und x-Straße aus.
Das zweite Integral wird subtrahiert, da
es negativ ist (da es unterhalb der
x-Achse liegt).