LÖSUNGEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1a) $x^3 - a^2x = 0$

$x(x^2 - a^2) = 0$

$x_1 = 0$

$x^2 - a^2 = 0$

$x^2 = a^2 \quad | \sqrt{\ }$

$x_2 = a$

$x_3 = -a$

Fallunterscheidung:

$a = 0$	$a \neq 0$
eine Nullstelle	drei Nullstellen
$x = 0$	$x_1 = -a$
	$x_2 = 0$
	$x_3 = a$

b) N.B.: $f_a'(x) = 0$

$f_a'(x) = 3x^2 - a^2$

$3x^2 - a^2 = 0$

$3x^2 = a^2$

$x^2 = \frac{a^2}{3} \quad | \sqrt{\ }$

$x_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$x_2 = -\frac{a}{\sqrt{3}}$

H.B.: $f_a'(x) = 0 \wedge f_a''(x) \neq 0$

$f_a''(x) = 6x$

$f_a''\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = 6 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \neq 0$ für $a \neq 0$

$$f_a''\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = 6 \cdot -\frac{a}{\sqrt{3}} \neq 0 \quad \text{für } a \neq 0$$

Fallunterscheidung:

① $a > 0$ Extremstellen:

$x_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$ Minimum

$x_2 = -\frac{a}{\sqrt{3}}$ Maximum

② $a < 0$ Extremstellen:

$x_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$ Maximum

$x_2 = -\frac{a}{\sqrt{3}}$ Minimum

③ $a = 0 \Rightarrow f(x) = x^3$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $x = 0$

y-Werte:

$$f_a\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3 - a^2 \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{a^3}{\sqrt{3}^3} - \frac{a^3}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{a^3}{\sqrt{3}^3} - \frac{3a^3}{\sqrt{3}^3}$$

$$= \frac{-2a^3}{(\sqrt{3})^3}$$

$$E_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}} \,\Big/\, -\frac{2}{(\sqrt{3})^3} \cdot a^3\right)$$

$$f_a\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3 - a^2 \cdot \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -\frac{a^3}{\sqrt{3}^3} + \frac{a^3}{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{a^3}{\sqrt{3}^3} + \frac{3a^3}{\sqrt{3}^3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}^3} a^3$$

$$E_2\left(-\frac{a}{\sqrt{3}} \,/\, \frac{2}{\sqrt{3}^3} a^3\right)$$

c) zu E_1: $\frac{a}{\sqrt{3}} = x$

$$a = \sqrt{3}x$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{(\sqrt{3})^3} \cdot (\sqrt{3}x)^3 = -\frac{2}{(\sqrt{3})^3} \cdot (\sqrt{3})^3 x^3 = -2x^3$$

$$\Rightarrow f(x) = -2x^3$$

zu E_2: $-\frac{a}{\sqrt{3}} = x$

$$-a = \sqrt{3}x$$

$$a = -\sqrt{3}x$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{(\sqrt{3})^3} \cdot (-\sqrt{3}x)^3 = \frac{2}{(\sqrt{3})^3} \cdot (-\sqrt{3})^3 \cdot x^3 = \frac{-2}{(\sqrt{3})^3} \cdot (\sqrt{3})^3 \cdot x^3 = -2x^3$$

$$\Rightarrow f(x) = -2x^3$$

Ergebnis: $O(x) = -2x^3 \quad , \; x \neq 0$

d) $x^3 - (a_1)^2 x = x^3 - (a_2)^2 x \quad | -x^3$

$-(a_1)^2 x = -(a_2)^2 x$

$(a_2)^2 x - (a_1)^2 x = 0$

$x\,(\underbrace{a_2^2 - a_1^2}_{\neq 0}) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow y = 0$

Ergebnis: Der Punkt $P(0|0)$ gehört allen Funktionen der Schar an.

e) $f_a(a) = a^3 - a^2 \cdot a = a^3 - a^3 = 0$

$\Rightarrow A(a|0)$

$f_a'(x) = 3x^2 - a^2$

$f_a'(a) = 3a^2 - a^2 = 2a^2$

$\Rightarrow t(x) = 2a^2 \cdot x + b$

$A(a|0)$ auf t $\Rightarrow t(a) = 0$

$2a^2 \cdot a + b = 0$

$2a^3 + b = 0$

$b = -2a^3$

$\Rightarrow t(x) = 2a^2 \cdot x - 2a^3$

f) Nullstellen (aus Teil a):

$x_1 = -2 \qquad x_3 = 0$

$x_2 = 2$

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} x^3 - 4x\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0}$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{4}\cdot(-2)^4 - 2\cdot(-2)^2\right)$$

$$= -(4-8)$$

$$= -(-4)$$

$$= 4$$

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} x^3 - 4x\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2^4 - 2\cdot 2^2 - 0$$

$$= 4 - 8$$

$$= -4$$

$A_{links} = 4\,FE$

$A_{rechts} = 4\,FE$

$A_{gesamt} = A_{links} + A_{rechts} = \underline{8\,FE}$

g) $A = \frac{-x \cdot y}{2}$ (Hauptbed.)

$y = x^3 - 4x$ (Nebenbed.)

$A(x) = \frac{-x \cdot (x^3 - 4x)}{2}$ (Zielf.)

$= \frac{1}{2} \cdot (-x^4 + 4x^2)$

$= -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2$

N.B.: $A'(x) = 0$

$A'(x) = -2x^3 + 4x$

$-2x^3 + 4x = 0$

$x \cdot (-2x^2 + 4) = 0$

$x_1 = 0$ $-2x^2 + 4 = 0$

$x^2 = 2$

$x = -\sqrt{2}$

($\sqrt{2}$ liegt im 1. Quadranten)

H.B.: $A'(x) = 0 \wedge A''(x) \neq 0$

$A''(x) = -6x^2 + 4$

$A''(0) = +4 \Rightarrow$ Min. bei $x = 0$

$A''(-\sqrt{2}) = -6 \cdot 2 + 4 = -8 \Rightarrow$ Max. bei $x = -\sqrt{2}$

Ränder: einzige ES innerhalb des Def. bereichs

($x = 0$ liegt genau auf dem Rand)

y-Wert:

$$y = (-\sqrt{2})^3 - 4 \cdot \sqrt{2} = -(\sqrt{2})^3 + 4 \cdot \sqrt{2}$$

$$= -2 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{2}$$

$$= 2 \cdot \sqrt{2}$$

$\Rightarrow P(-\sqrt{2} / 2 \cdot \sqrt{2})$

h) $A = \frac{\text{Breite unten}}{2} \cdot f(x)$

$$A = \frac{2 \cdot f(x)}{2}$$

$A(x) = f(x)$

P muss der Extrempunkt sein. Also (nach b): $x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \approx -1{,}15$

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}^3} \cdot 2^3 \approx 3{,}08$$

$\Rightarrow P(-1{,}15 / 3{,}08)$

i) $\int_{-k}^{-2} x^3 - 4x \, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-k}^{-2}$

$$= (4 - 8) - \left(\frac{1}{4}k^4 - 2k^2\right)$$

$$= -4 - \frac{1}{4}k^4 + 2k^2$$

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = 4 \quad (\text{siehe Teil } f)$$

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = -4 \quad (\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"})$$

$$\int_{2}^{k} x^3 - 4x\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_2^k$$

$$= \frac{1}{4}k^4 - 2k^2 - (4-8)$$

$$= \frac{1}{4}k^4 - 2k^2 + 4$$

Die Bereiche ganz links und zwischen 0 und 2 sind negativ $\rightarrow$ Vorzeichen herumdrehe

$$A = 4 + \frac{1}{4}k^4 - 2k^2 + 4 + 4 + \frac{1}{4}k^4 - 2k^2 + 4$$

$$A = 16 + \frac{1}{2}k^4 - 4k^2 \quad (\text{für } k > 2)$$

$$16 + \frac{1}{2}k^4 - 4k^2 = 10$$

$$6 + \frac{1}{2}k^4 - 4k^2 = 0$$

(TR ...)

$$\underline{k = 2{,}45}$$

j) $x^3 - 4x = b \cdot x$

$x^3 - 4x - bx = 0$

$x^3 - (4+b) \cdot x = 0$

$x \cdot (x^2 - (4+b)) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x^2 = 4 + b \quad |\sqrt{\ }$

$x = \pm\sqrt{4+b}$

$4 + b = 0$

$b = -4$

Fallunterscheidung:

$b < -4$	$b > -4$
ein Schnittpunkt	drei Schnittpunkte
$x_1 = 0$	$x_1 = -\sqrt{4+b}$
	$x_2 = 0$
	$x_3 = \sqrt{4+b}$

y-Wert:

$g_b(0) = 0 \qquad S_1(0|0)$

$g_b(-\sqrt{4+b}) = -b \cdot \sqrt{4+b}$

$S_2(-\sqrt{4+b} \,/\, -b \cdot \sqrt{4+b})$

$g_b(\sqrt{4+b}) = b \cdot \sqrt{4+b}$

$S_3(\sqrt{4+b} \,/\, b \cdot \sqrt{4+b})$

2a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$f(230) = 50 \Rightarrow (230)^3 \cdot a + (230)^2 b = 50$

$12.167.000\,a + 52.900\,b = 50$

$f(460) = 0 \Rightarrow (460)^3 \cdot a + (460)^2 \cdot b = 0$

$97.336.000\,a + 211.600\,b = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 12.167.000 & 52.900 & 50 \\ 97.336.000 & 211.600 & 0 \end{array}\right)$$

(TR ...)

$a = -\frac{1}{243.340}$

$b = \frac{1}{529}$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{243.340}x^3 + \frac{1}{529}x^2$

Kontrolle H.B.:

$f'(x) = \frac{3}{243.340}x^2 + \frac{2}{529}x$

$f''(x) = \frac{6}{243.340}x + \frac{2}{529}$

$f''(0) = \frac{2}{529} \neq 0$ ✓

b)

$$\int_0^{460} f(x)\,dx = \int_0^{460} \frac{-1}{243.340} x^3 + \frac{1}{529} x^2 \,dx$$

$$= \left[\frac{-1}{973.360} x^4 + \frac{1}{1587} x^3 \right]_0^{460}$$

$$= \frac{-1}{973.360} \cdot 460^4 + \frac{1}{1587} \cdot 460^3$$

$$= -46.000 + 61.333,\overline{3}$$

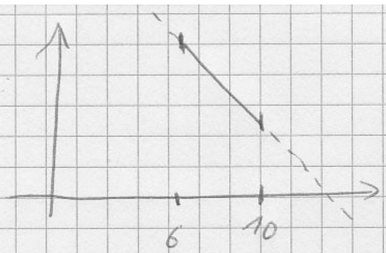
$$= 15.333,\overline{3}\ m^2$$

Preis: $15.333,\overline{3}\ m^2 \cdot 12\ €/m^2 = 184.000\ €$

c)

Preis: $184.000 \cdot 1,0348 = 190.403,2\ €$

3)



Bestimmung der Geradengleichung:

A(6/6) }
B(10/4) } auf der Gerade

$f(x) = mx + b$

$m = \frac{4-6}{10-6} = \frac{-2}{4} = -0{,}5$

$\Rightarrow f(x) = -0{,}5x + b$

A(6/6) auf f $\Rightarrow f(6) = 6$

$-0{,}5 \cdot 6 + b = 6$

$-3 + b = 6$

$b = 9$

$\Rightarrow f(x) = -0{,}5x + 9$

Suche nach P:

$A = x \cdot y$ (Hauptbed.)

$y = -0{,}5x + 9$ (Nebenbed.)

$A(x) = x \cdot (-0{,}5x + 9)$ (Zielf.)

$= -0{,}5x^2 + 9x$

N.B.: $A'(x) = 0$

$A'(x) = -x + 9$

$-x + 9 = 0$

$x = 9$

H.B.: $A'(x) = 0 \land A''(x) \neq 0$

$A''(x) = -1$

$A''(9) = -1 < 0$

$\Rightarrow$ HP bei $x = 9$

Ränder: einzige ES ✓

y-Wert:

$y = -0{,}5 \cdot 9 + 9 = 4{,}5$

$\Rightarrow P(9 \mid 4{,}5)$

Es gilt: $9 = 10 - a$

$\Rightarrow a = 1$

Antwort: Man muss $a = 1$ wählen.

4) a) $f(x) = 0{,}2x^4 - 1{,}8x^2$

$f'(x) = 0{,}8x^3 - 3{,}6x$ $\quad$ $f''(x) = 2{,}4x^2 - 3{,}6$

Bestimmung der Minima:

N.B.: $f'(x) = 0$

$0{,}8x^3 - 3{,}6x = 0$

$x \cdot (0{,}8x^2 - 3{,}6) = 0$

$x_1 = 0 \qquad 0{,}8x^2 = 3{,}6$

$x^2 = 4{,}5$

$x = \pm\sqrt{4{,}5}$

H.B.: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(-\sqrt{4{,}5}) = 2{,}4 \cdot 4{,}5 - 3{,}6 > 0$

$\Rightarrow$ Min. bei $x = -\sqrt{4{,}5}$

$f''(\sqrt{4{,}5}) = 2{,}4 \cdot 4{,}5 - 3{,}6 > 0$

$\Rightarrow$ Min. bei $x = \sqrt{4{,}5}$

$f''(0) = -3{,}6 < 0$

$\Rightarrow$ Max. bei $x = 0$

y-Werte:

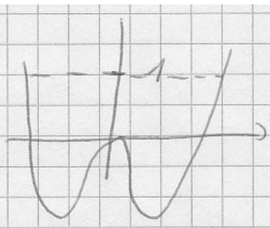
$f(-\sqrt{4{,}5}) = -4{,}05$ $\qquad$ $f(0) = 0$

$f(\sqrt{4{,}5}) = -4{,}05$

Das Deck ist 1m über H

$\Rightarrow$ Es befindet sich 5,05m über den tiefsten Stellen.

b)



$f(x) = 1$

$0{,}2x^4 - 1{,}8x^2 = 1$

$0{,}2x^4 - 1{,}8x^2 - 1 = 0$

(TR...)

$x_1 = -3{,}086$

$x_2 = 3{,}086$

$\Rightarrow$ Breite $= 2 \cdot 3{,}086 = 6{,}172\,m$

c)

gesucht: NS

$f(x) = 0$

$0{,}2x^4 - 1{,}8x^2 = 0$

$x^2(0{,}2x^2 - 1{,}8) = 0$

$x = 0 \qquad 0{,}2x^2 = 1{,}8$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \int_{-3}^{3} 0{,}2x^4 - 1{,}8x^2\,dx$$

$$= \left[0{,}04x^5 - 0{,}6x^3\right]_{-3}^{3}$$

$$= (0{,}04 \cdot 3^5 - 0{,}6 \cdot 3^3) - (0{,}04 \cdot (-3)^5 - 0{,}6 \cdot (-3)^3)$$

$$= -6{,}48 - 6{,}48$$

$$= -12{,}96$$

Die Querschnittsfläche ist $12,96\ m^2$ groß.

$$V = \text{Querschnittsfl.} \cdot 12$$
$$= 12,96 \cdot 12$$
$$= 155,52\ m^3$$

Es sind $155,52\ m^3$ Styropor.