LÖSUNGEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1 a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-(-3) \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ -2-(-3) \\ 0{,}25-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$

$\vec{DC} = \begin{pmatrix} 0-(-2) \\ 2-(-2) \\ 0{,}25-0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 2-1 \\ 0{,}25-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Parallelogramm

$$\vec{AB} \circ \vec{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0{,}25 \end{pmatrix} = 2\cdot(-2) + 4\cdot 1 + 0\cdot 0{,}25$$
$$= -4 + 4$$
$$= 0$$

$\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{AD}$
(rechter Winkel)

$\Rightarrow$ Rechteck

Länge und Breite:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \approx 4{,}47 \text{ m}$$

$$|\vec{AD}| = \sqrt{(-2)^2+1^2+0{,}25^2} = \sqrt{4+1+0{,}0625}$$
$$= \sqrt{5{,}0625}$$
$$= 2{,}25 \text{ m}$$

b) $E: \vec{OX} = \vec{OA} + r\cdot\vec{AB} + s\cdot\vec{AC}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-(-3) \\ 0-0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-(-3) \\ 0{,}25-0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$$

(Parameterform)

$$\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\5\\0{,}25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-0{,}5\\10\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 4 & 5 \\ 0 & 0{,}25 \\ 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{array}$$

$\Rightarrow E: x - 0{,}5y + 10z = d$

Einsetzen von A:

$$0 - 0{,}5 \cdot (-3) + 10 \cdot 0 = d$$
$$1{,}5 = d$$

$\Rightarrow E: x - 0{,}5y + 10z = 1{,}5$
(Koordinatenform)

$D(-2/-2/0{,}25)$
Punktprobe:

$$-2 - 0{,}5 \cdot (-2) + 10 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$$
$$-2 + 1 + 2{,}5 = 1{,}5$$
$$1{,}5 = 1{,}5 \checkmark$$

$\Rightarrow$ D liegt in E

c) horizontale Ebene $\hat{=}$ xy-Ebene

$H: z = 0$
mit Normalenvektor $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$|\vec{n}_1| = 1$

$E: 2x - y + 20z = 3$

mit Normalenvektor $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 20 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{n}_2| = \sqrt{4+1+400} = \sqrt{405}$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 20 \end{pmatrix}\right|}{1 \cdot \sqrt{405}}$$

$$= \frac{20}{\sqrt{405}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{20}{\sqrt{405}}\right) \approx \underline{\underline{6{,}38°}}$$

d) $\vec{OM} = \vec{OB} + 0{,}5 \cdot \vec{BC}$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 0{,}125 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 0{,}125 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M\,(1 / 1{,}5 / 0{,}125)$

Da die Zeltstange senkrecht auf E steht, eignet sich der Normalenvektor $\vec{n}_2$ zur Angabe der Richtung:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 20 \end{pmatrix}$$

e) Hang: $E: 2x - y + 20z = 3$

Schattenlinie: $g: \vec{OX} = \vec{OP} + t \cdot \vec{r}$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ -2{,}6 \\ 2{,}1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}8 + 5t \\ -2{,}6 - t \\ 2{,}1 - 2t \end{pmatrix}$$

Einsetzen:

$$2(-0{,}8 + 5t) - (-2{,}6 - t) + 20(2{,}1 - 2t) = 3$$

$$-1{,}6 + 10t + 2{,}6 + t + 42 - 40t = 3$$

$$43 - 29t = 3$$

$$-29t = -40$$

$$t = \frac{40}{29}$$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ -2{,}6 \\ +2{,}1 \end{pmatrix} + 40/29 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ -2{,}6 \\ 2{,}1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200/29 \\ -40/29 \\ -80/29 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8/10 \\ -26/10 \\ 21/10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200/29 \\ -40/29 \\ -80/29 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1116/145 \\ -577/145 \\ -191/290 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 7{,}7 \\ -4 \\ -0{,}7 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Q(7{,}7 / -4{,}0 / -0{,}7)$

2 a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 5 \\ 5 - (-5) \\ 24 - 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{DC} = \begin{pmatrix} -5 - (-5) \\ 5 - (-5) \\ 24 - 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -5 - 5 \\ 5 - 5 \\ 24 - 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{AD} = \begin{pmatrix} -5 - 5 \\ -5 - (-5) \\ 24 - 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Parallelogramm

$|\vec{AB}| = |\vec{BC}| = |\vec{DC}| = |\vec{AD}| = 10$ cm

$\vec{AB} \circ \vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{BC}$

$\Rightarrow$ rechte Winkel

$\Rightarrow$ Quadrat

b) $E(0/0/40)$
$B(5/5/24)$

$g: \vec{OX} = \vec{OE} + r \cdot \vec{EB}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 - 0 \\ 5 - 0 \\ 24 - 40 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -16 \end{pmatrix}$

x-y-Ebene: $z = 0$

Einsetzen: $40 - 16r = 0$

$40 = 16r$

$2{,}5 = r$

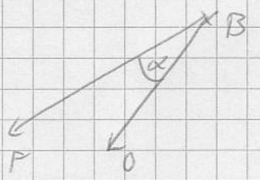
$\Rightarrow \vec{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} + 2{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -16 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12{,}5 \\ 12{,}5 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12{,}5 \\ 12{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow F(12{,}5/12{,}5/0)$

c) $\vec{OB} = \begin{pmatrix}5\\5\\24\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{BO} = \begin{pmatrix}-5\\-5\\-24\end{pmatrix}$ $\quad |\vec{BO}| = \sqrt{25+25+576} = \sqrt{626}$

$\vec{BF} = \begin{pmatrix}17{,}5-5\\17{,}5-5\\0-24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7{,}5\\7{,}5\\-24\end{pmatrix}$ $\quad |\vec{BF}| = \sqrt{56{,}25+56{,}25+576} = \sqrt{688{,}5}$



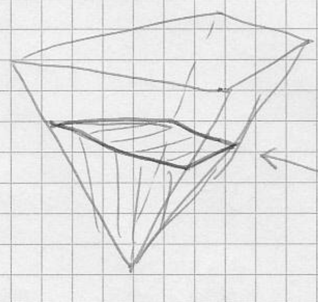
$$\cos\alpha = \frac{\vec{BO} \circ \vec{BF}}{|\vec{BO}| \cdot |\vec{BF}|} = \frac{\begin{pmatrix}-5\\-5\\-24\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}7{,}5\\7{,}5\\-24\end{pmatrix}}{\sqrt{626} \cdot \sqrt{688{,}5}}$$

$$= \frac{-37{,}5-37{,}5+576}{\sqrt{431001}}$$

$$= \frac{501}{\sqrt{431001}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{501}{\sqrt{431001}}\right) \approx \underline{40{,}26°}$$

d)



Wir benötigen die Kantenlänge des neuen Quadrates, das die Oberfläche des Wassers angibt

Das neue Quadrat liegt in der Ebene
E: z = 18

Wir suchen ihren Schnittpunkt mit $\overrightarrow{OA}$:

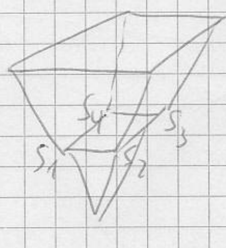
$$g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AO}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 24 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -24 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 - 5r \\ -5 + 5r \\ 24 - 24r \end{pmatrix}$$

Einsetzen:

$$24 - 24r = 18$$
$$-24r = -6$$
$$r = 0{,}25$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 24 \end{pmatrix} + 0{,}25 \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -24 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3{,}75 \\ -3{,}75 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Da das Quadrat symmetrisch ist, gilt:



$S_1(3{,}75 / -3{,}75 / 18)$
$S_2(3{,}75 / 3{,}75 / 18)$
$S_3(-3{,}75 / 3{,}75 / 18)$
$S_4(-3{,}75 / -3{,}75 / 18)$

Das Quadrat hat eine Kantenlänge von
$2 \cdot 3{,}75 = 7{,}5$ cm

$$V_{Wasser} = \frac{1}{3} \cdot \text{Höhe des Wassers} \cdot (\text{Kantenlänge des Quadrats})^2$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 7{,}5^2$$

$$= 337{,}5 \, cm^3$$

e) Da R von A, B, C und D denselben Abstand haben soll, muss es auf der z-Achse liegen.

R (0/0/z)

R soll von A und 0 gleichweit entfernt sein:

$$|\vec{RA}| = |\vec{RO}|$$

$$\left|\begin{pmatrix} 5-0 \\ -5-0 \\ 24-z \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}\right|$$

$$\left|\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 24-z \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}\right|$$

$$\sqrt{25 + 25 + (24-z)^2} = \sqrt{z^2}$$

$$\sqrt{50 + (24-z)^2} = \sqrt{z^2} \quad | \text{ Quadrieren beider Seiten}$$

$$50 + (24-z)^2 = z^2 \quad | \text{ binom. Formeln}$$

$$50 + 576 - 48z + z^2 = z^2 \quad | -z^2$$

$$50 + 576 - 48z = 0$$

$$626 - 48z = 0$$

$$626 = 48z$$

$$13{,}04 \approx 313/24 = z$$

$\Rightarrow R(0/0/13{,}04)$

3a) Die Kantenlänge ist 6 LE

$\Rightarrow$ $G_1(0/0/0)$ $\quad$ $D_1(0/0/6)$
$G_2(6/0/0)$ $\quad$ $D_2(6/0/6)$
$G_3(6/6/0)$ $\quad$ $D_3(6/6/6)$
$G_4(0/6/0)$ $\quad$ $D_4(0/6/6)$

b) $E: \vec{OX} = \vec{OD_1} + r \cdot \vec{D_1G_2} + s \cdot \vec{D_1D_3}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6-0 \\ 0-0 \\ 0-6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6-0 \\ 6-0 \\ 6-6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -36 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 6 & 6 \\ 0 & 6 \\ -6 & 0 \\ 6 & 6 \\ 0 & 6 \end{array}$$

Nach dem Kürzen des Normalenvektors ergibt sich:

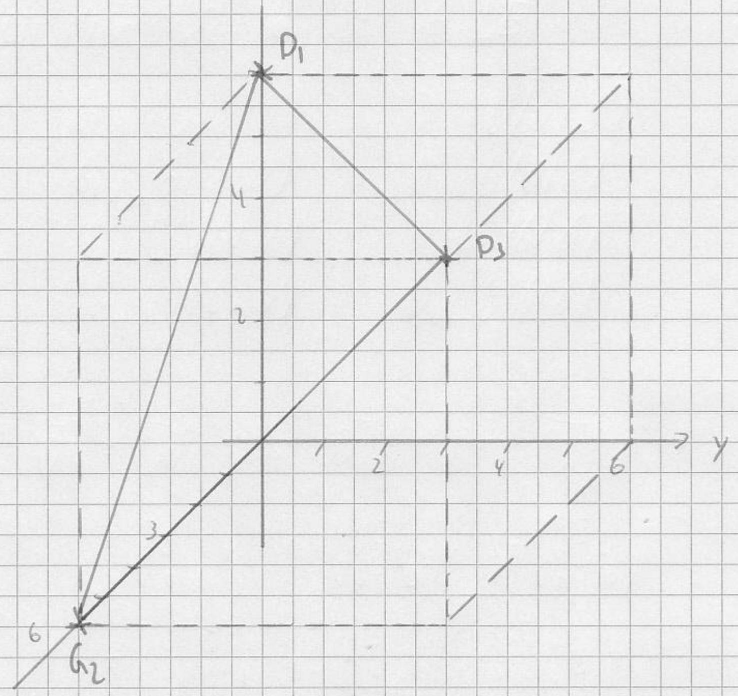
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow E: x - y + z = d$

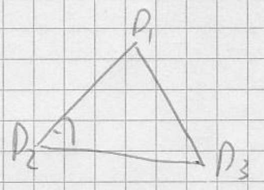
Wir setzen $D_1(0/0/6)$ ein:

$$0 - 0 + 6 = d$$
$$6 = d$$

$\Rightarrow E: x - y + z = 6$



c) Die Pyramide hat oben ein rechtwinkliges Dreieck ($D_1 D_2 D_3$) als Grundfläche



Es gilt:

$$|\overrightarrow{D_1D_2}| = \left|\begin{pmatrix} 6-0 \\ 0-0 \\ 6-6 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 6$$

$$|\overrightarrow{D_2D_3}| = \left|\begin{pmatrix} 6-6 \\ 6-0 \\ 6-6 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 6$$

Die Höhe der Pyramide:

$$|\overrightarrow{D_2G_2}| = \left|\begin{pmatrix} 6-6 \\ 0-0 \\ 0-6 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = 6$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\right) \cdot 6$$

$$\underline{\underline{V = 36 \text{ VE}}}$$

$$V_{Würfel} = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216 \text{ VE}$$

$$\text{Anteil} = \frac{V_{Pyr}}{V_{Würfel}} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6} \approx 16{,}67\,\%$$

d) $E: x - y + z = 6$

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{n_1}| = \sqrt{3}$$

$G: z = 0$

$$\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{n_2}| = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{|n_1 \circ n_2|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx \underline{54{,}74°}$$

gesucht: Ebene H, die mit G einen 45°-Winkel einschließt

$D_2(6/0/6)$

$D_3(6/6/6)$

$G_1(0/0/0)$

$$H: \vec{OX} = \vec{OG_1} + r \cdot \vec{G_1D_2} + s \cdot \vec{G_1D_3}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-36\\0\\36\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 6 & 6 \\ 0 & 6 \\ 6 & 6 \\ 6 & 6 \\ 0 & 6 \end{array}$$

nach dem kürzen erhalten wir:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad |\vec{n}| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow H: -x + z = d$$

$G_1(0|0|0)$ liegt auf H

$$\Rightarrow H: -x + z = 0$$

Winkel:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n_2} \circ \vec{n}|}{|\vec{n_2}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$$ ✓

e) 1. Schritt:

Die Ebenen sind parallel (oder identisch), da ihre Normalenvektoren übereinstimmen.

2. Schritt: Abstand

Da die Ebenen parallel sind, genügt es, den Abstand des Aufpunktes von E zu F zu bestimmen.

$A(0|0|6)$

$$HNF = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \left(\vec{n} \circ \left(\vec{OX} - \vec{OA} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \right)$$

Nebenrechnung:
Aufpunkt von F:
$x = y = 0$
$\Rightarrow z = 3$
$\Rightarrow B(0|0|3)$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}}$$

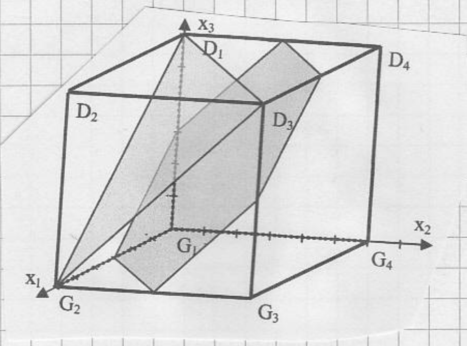
$$= \underline{\sqrt{3}\ LE}$$

f) Es ergeben sich Dreiecke oder Sechsecke oder Punkte

Punkte: wenn nur D_2 bzw. G_4 Schnittmenge sind

Dreiecke: wenn es auf der Deckfläche eine Schnittgerade gibt, aber nicht auf der Grundfläche (und anders herum)

Sechseck: wenn es auf der Deck- und der Grundfläche eine Schnittgerade gibt.


x3
D1
D4
D2
D3
x2
G1
G4
x1
G2
G3