LÖSUNGEN (hilfsmittelfreier Teil)

1) a) E: $\vec{OX} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC}$

$$E: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Parameterform)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}$$

$E: x + 2y - 4z = d$

$A(1|0|0)$ liegt auf E $\Rightarrow$ $1 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = d$

$1 = d$

$\Rightarrow E: x + 2y - 4z = 1$

(Koordinatenform)

b) Punktprobe:

$D(5|2|2)$

$5 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = 1$

$5 + 4 - 8 = 1$

$9 - 8 = 1$

$1 = 1$ ✓

D liegt auf E.

c) Eine Ebene ist parallel zu E, wenn sie denselben Normalenvektor hat.

$$E_2: x + 2y - 4z = d$$

Die beiden Ebenen müssen sich im Wert für d unterscheiden, wenn sie nicht identisch sein sollen.

$$E_2: x + 2y - 4z = 5$$

d) Der Normalenvektor steht senkrecht auf E, ist also als Richtungsvektor der Gerade geeignet. Als Schnittpunkt (und Aufpunkt der Geraden) wählen wir A:

$$g: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

e) $$g: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+r \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$E: x + 2y - 4z = 1$$

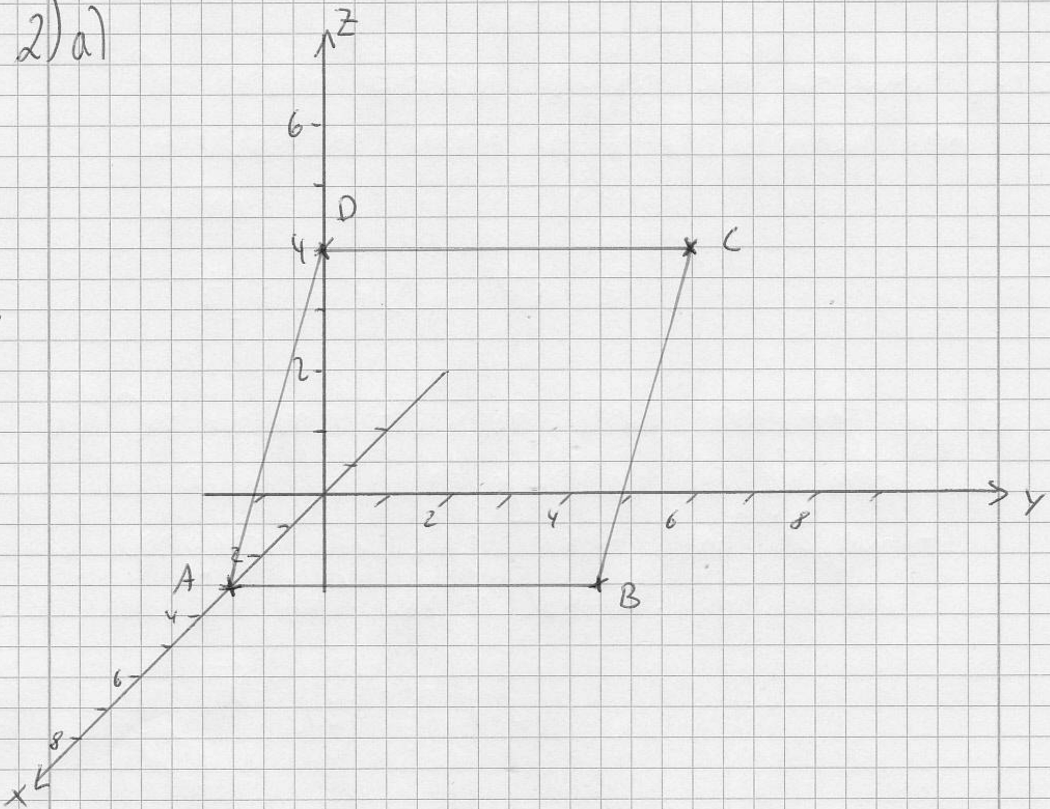
Einsetzen:

$$\begin{aligned} 1 + 2\cdot(1+r) - 4\cdot 5 &= 1 \\ 1 + 2 + 2r - 20 &= 1 \\ 2r - 17 &= 1 \\ 2r &= 18 \\ r &= 9 \end{aligned}$$

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S(1/10/5)$

2) a)



b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 6-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad\vec{AD} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{DC} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 6-0 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad\vec{BC} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 6-6 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Parallelogramm

$$\vec{AB} \circ \vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{AD}$

$\Rightarrow$ Rechteck

c) $E: \vec{OX} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AD}$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(Parameterform)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & -3 \\ 6 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & -3 \\ 6 & 0 \end{matrix}$$

gekürzte Form des Normalenvektors: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E: 4x + 3z = d$

Wir setzen A ein, um d zu bestimmen:

$$4 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = d$$
$$12 = d$$

$\Rightarrow E: 4x + 3z = 12$

d) Punktprobe:

$$4 \cdot 6 + 3 \cdot (-4) = 12$$
$$24 - 12 = 12$$
$$12 = 12 \checkmark$$

$\Rightarrow$ E liegt auf der Ebene E

E liegt nicht innerhalb des Vierecks, da
E unterhalb der xy-Ebene liegt.
Das Viereck liegt oberhalb.

e) Da der Normalenvektor senkrecht auf der Ebene steht, ist er als Richtungsvektor der Gerade geeignet. Als Aufpunkt der Geraden (und Schnittpunkt) verwenden wir A.

$$g: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3a)
$$2x + y - 5z = 8$$
$$y = 8 - 2x + 5z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 8 - 2x + 5z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5z \\ z \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Da der Normalenvektor senkrecht auf E steht, ist er als Richtungsvektor der Geraden geeignet. Als Aufpunkt von g (und Schnittpunkt) nehmen wir A(0/8/0)

$$g: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

c) Einsetzen in die Koordinatenform:

$$2a + 1 - 5 = 8$$
$$2a - 4 = 8$$
$$2a = 12$$
$$\underline{a = 6}$$

d) Punktprobe:

$$2 \cdot 0 + 0 - 5 \cdot 0 = 8$$
$$0 = 8 \quad ↯$$

Der Koordinatenursprung liegt nicht auf E.

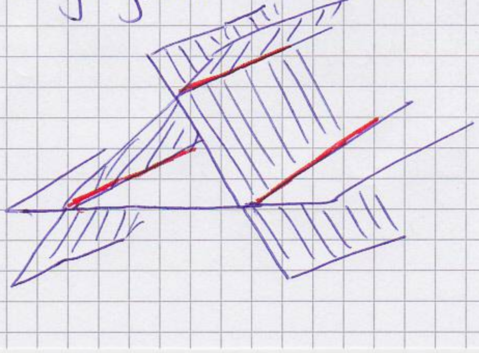
e) x-Achse: $g: \vec{OX} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Einsetzen: $2 \cdot r + 0 - 5 \cdot 0 = 8$
$$2r = 8$$
$$r = 4$$

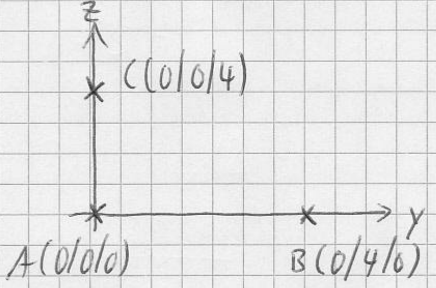
$\Rightarrow \vec{OS} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow S(4/0/0)$

4) Die folgende Situation ist gegeben:



Dazu nehmen wir drei Punkte:



$E_1: \vec{OX} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_2: \vec{OX} = \vec{OB} + r \cdot \vec{BC} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_3: \vec{OX} = \vec{OC} + r \cdot \vec{CA} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_1: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_2: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_3: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ -3 - (-1) \\ 0 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Da g E senkrecht schneidet, ist $\vec{AB}$ als Normalenvektor von E geeignet.

$E: x - 2y - 3z = d$

Wir setzen C ein:

$4 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-8) = d$

$4 - 6 + 24 = d$

$22 = d$

$\Rightarrow x - 2y - 3z = 22$

Wir bestimmen eine Gleichung für g, indem wir A als Aufpunkt verwenden:

$$g: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + r \\ -1 - 2r \\ 3 - 3r \end{pmatrix}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned}
1 + r - 2(-1 - 2r) - 3(3 - 3r) &= 22 \\
1 + r + 2 + 4r - 9 + 9r &= 22 \\
-6 + 14r &= 22 \\
14r &= 28 \\
r &= 2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S(3/-5/-3)$

6) a) Wir kontrollieren die Normalenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{array}$$

Die Normalenvektoren sind Vielfache
$\Rightarrow E_1$ und E_2 entweder echt parallel oder identisch

Um den Fall „identisch" auszuschließen, machen wir eine Punktprobe:

$A(7/7/5)$

$$2\cdot 7 - 2\cdot 7 + 5 = -1$$
$$14 - 14 + 5 = -1$$
$$5 = -1 \quad ↯$$

$\Rightarrow E_1$ und E_2 echt parallel

b) Da E_3 parallel zu E_1 und E_2 ist, muss es denselben Normalenvektor haben. Also:

$$E_3: 2x - 2y + z = d$$

Jetzt soll E_3 genau in der Mitte zwischen E_1 und E_2 liegen. Um einen Punkt von E_3 zu erhalten, genügt es die Mitte zwischen zwei beliebigen Punkten von E_1 bzw. E_2 zu nehmen.

Punkt von E_1:

$x = y = 0 \Rightarrow z = -1$

$\Rightarrow A(0/0/-1)$

$A(0/0/-1)$
$B(7/7/5)$

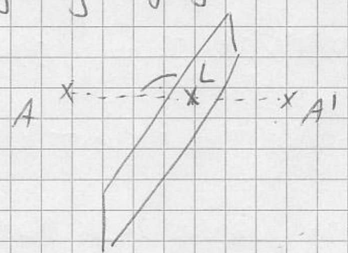
$$\vec{OM} = \vec{OA} + 0{,}5\cdot\vec{AB} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + 0{,}5\cdot\begin{pmatrix}7\\7\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3{,}5\\3{,}5\\2\end{pmatrix}$$

$M(3{,}5/3{,}5/2)$ liegt auf E_3

$$\Rightarrow 2\cdot 3{,}5 - 2\cdot 3{,}5 + 2 = d$$
$$7 - 7 + 2 = d$$
$$2 = d$$

$$\Rightarrow E: 2x - 2y + z = 2$$

7) Eine Spiegelung erfolgt senkrecht: Man verbindet A senkrecht mit E und erhält einen Punkt L auf E. Von L aus trägt man $\overrightarrow{AL}$ nochmals ab.



Ebene $E: x - z = 4$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Spiegelgerade g:

$$g: \overrightarrow{OA} + r\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt L mit E:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r \\ 1 \\ 3-r \end{pmatrix}$$

Einsetzen:

$$(1+r) - (3-r) = 4$$
$$1 + r - 3 + r = 4$$
$$-2 + 2r = 4$$
$$2r = 6$$
$$r = 3$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AL} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-1 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AL}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A'(7|1|-3)$