AUFGABEN (Hilfsmittelfreier Teil)

1) Gegeben seien die Punkte A(1/0/0), B(1/2/1) und C(3/1/1). Die drei Punkte liegen in einer Ebene E.

a) Bestimme für die Ebene E jeweils eine Gleichung in Parameter- und in Koordinatenform.

Kontrollergebnis: $x + 2y - 4z = 1$

b) Liegt der Punkt D(5/2/2) auf E?

c) Geben Sie die Koordinatengleichung einer beliebigen Ebene an, die parallel zu E ist.

d) Geben Sie die Gleichung einer beliebigen Gerade an, die E rechtwinklig schneidet.

e) Gegeben sei die Gerade $g: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Bestimme den Schnittpunkt von g mit E.

2) Gegeben sei das Viereck ABCD mit A(3/0/0), B(3/6/0), C(0/6/4) und D(0/0/4).

a) Zeichne das Viereck in ein dreidimensionales Koordinatensystem.

b) Zeige rechnerisch, dass es sich um ein Rechteck handelt.

c) Das Viereck liegt in einer Ebene E.
Gib eine Gleichung in Koordinatenform und eine in Parameterform für diese Ebene an.

Kontrollergebnis: $4x + 3z = 12$

d) Gegeben sei der Punkt $E(6/0/-4)$.
Liegt der Punkt E auf der Ebene E?
Liegt der Punkt E im Viereck ABCD?

e) Gib die Gleichung einer beliebigen Gerade an, die das Viereck ABCD rechtwinklig schneidet.

3) Gegeben sei die Ebene $E: 2x + y - 5z = 8$.

a) Bestimme eine Parameterform für die Ebenengleichung.

b) Gib die Gleichung einer beliebigen Gerade an, die die Ebene rechtwinklig schneidet.

c) Welche Zahl muss man für a wählen, damit der Punkt $A(a/1/1)$ auf der Ebene E liegt?

d) Liegt der Koordinatenursprung auf E?

e) Wo schneidet E die x-Achse?

4) Gib die Gleichungen von drei beliebigen Ebenen an, die sich paarweise jeweils in einer Schnittgerade schneiden. Es soll keinen Schnittpunkt für alle drei Ebenen geben.

5) Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(1|-1|3)$ und $B(2|-3|6)$. Die Ebene E wird von g orthogonal geschnitten und enthält den Punkt $C(4|3|-8)$.
Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g und E.

6) Gegeben sind die beiden Ebenen
$E_1: 2x - 2y + z = -1$ und $E_2: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Zeige, dass die Ebenen echt parallel zueinander sind.

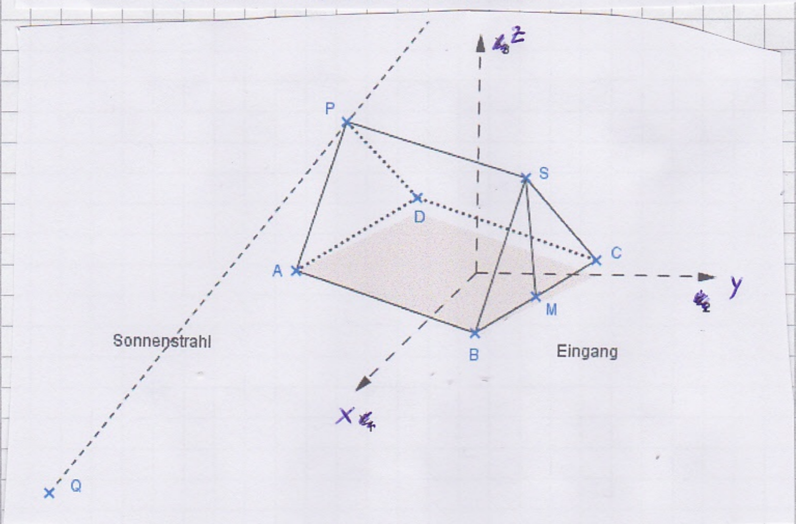
b) Die Ebene E_3 ist parallel zu E_1 und E_2 und hat von beiden Ebenen denselben Abstand. Bestimme eine Gleichung von E_3.

7) Gegeben sind der Punkt $A(1|1|3)$ und die Ebene $E: x - z = 4$. Der Punkt A wird an E gespiegelt. Bestimme die Koordinaten des Bildpunktes.

AUFGABEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1) Camping-Zelt (Vorbild: Abitur Bremen 2009)

Eine kleine Gruppe junger Leute unternimmt eine Campingreise und schlägt gegen Abend ihr Zelt auf. Der Untergrund ist eben, aber leicht abschüssig am Hang eines Hügels gelegen. Denkt man sich ein Koordinatensystem ungefähr durch die Mitte des Zeltes gelegt, so kann man die Ecken der Grundfläche mit den Punkten $A(0|-3|0)$, $B(2|1|0)$, $C(0|2|0{,}25)$ und $D(-2|-2|0{,}25)$ angeben (vgl. die Zeichnung unten). Eine Längeneinheit entspricht dabei einem Meter.



a) Zeigen Sie, dass die Grundfläche $ABCD$ des Zeltes ein Rechteck bildet.
Berechnen Sie die Länge und Breite des Zeltbodens.

b) Die Ebene E, die die Punkte A, B und C enthält, stellt den Hang des Hügels dar.
Bestimmen Sie für die Ebene E je eine Ebenengleichung in Parameterform und in Koordinatenform.
Begründen Sie, dass auch Punkt D in dieser Ebene liegt.

Verwenden Sie in den folgenden Aufgabenteilen für die Ebene E die Gleichung

$E: 2x - y + 20z = 3$

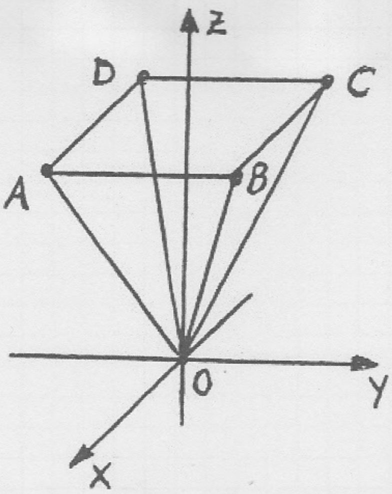
c) Ermitteln Sie den Winkel zwischen der Ebene E und der horizontalen Ebene, um eine Vorstellung von der Neigung des Hanges zu erhalten.

d) Der Eingang des Zeltes befindet sich in der Mitte M der Grundseite $\overline{BC}$. Die Spitze des Zeltes wird von einer Zeltstange gehalten, die rechtwinklig auf dem geneigten Erdboden steht.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes M.
Geben Sie einen Vektor an, der die Richtung der Zeltstange beschreibt.

e) Die dem Eingang gegenüberliegende Seite des Zeltes ist ein Dreieck ADP mit der Spitze $P(-0{,}8|-2{,}6|2{,}1)$. Die Strahlen der tief stehenden Sonne haben die Richtung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und werfen einen Schatten des Zeltes auf den schrägen Hang. Der Schatten der Spitze P fällt dabei auf den Punkt Q der Hangebene E.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q (Runden Sie auf 1 Nachkommastelle).

2) Regenauffangbehälter (Vorbild: Abitur Thüringen 2001)

Ein Regenauffangbehälter zur Messung von Niederschlägen hat die Form einer auf der Spitze stehenden, oben offenen geraden Pyramide (siehe Skizze).



Die Eckpunkte haben folgende Koordinaten: $A(5;-5;24)$, $B(5;5;24)$, $C(-5;5;24)$, $D(-5;-5;24)$, $O(0;0;0)$.
(1 LE entspricht 1 cm)

a) Die Punkte A, B, C und D beschreiben die obere Öffnung des Behälters. Zeigen Sie, dass diese Öffnung die Form eines Quadrates hat.

b) Gegeben ist ein weiterer Punkt $E(0; 0; 40)$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g, die durch die Punkte E und B verläuft!
Die Gerade g durchstößt die x-y-Ebene im Punkt F. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes!

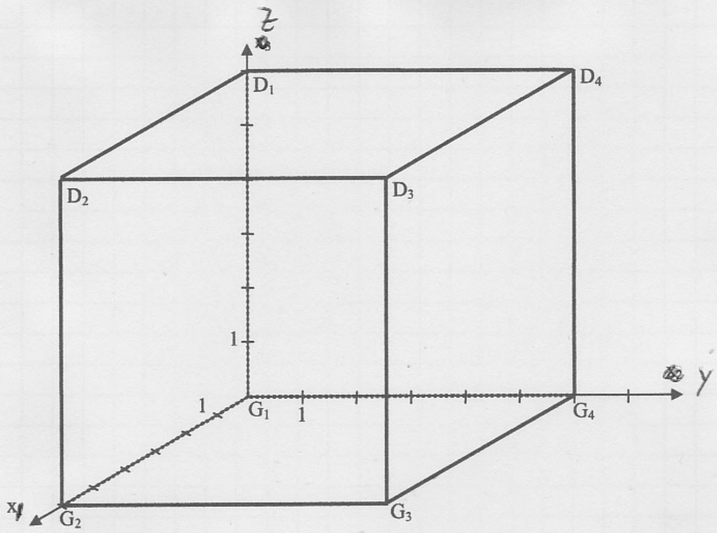
c) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Seitenkante $\overline{OB}$ und die Strecke $\overline{BF}$ einschließen!

d) Nach einem Regenguss ist der Behälter 18 cm hoch mit Wasser gefüllt.
Ermitteln Sie das Volumen des aufgefangenen Wassers!

e) Im Inneren der Pyramide existiert ein Punkt R, der von allen Eckpunkten der Pyramide den gleichen Abstand besitzt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes R!

3) WÜRFEL (Vorbild: Abitur-Beispielaufgaben Bayern 2011)

In einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Würfel W der Kantenlänge 6 gegeben. Die Eckpunkte $G_1(0|0|0)$ und $D_3(6|6|6)$ legen eine Raumdiagonale fest.



a) Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten von G_2, G_3, G_4, D_1, D_2 und D_4.

b) Bestimmen Sie in Koordinatenform eine Gleichung der Ebene E, die durch die Punkte D_1, G_2 und D_3 verläuft, und zeichnen Sie die Schnittfigur der Ebene E mit dem Würfel W ein.

[mögliches Ergebnis: E: $x - y + z = 6$]

c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide, die E vom Würfel W abschneidet.
Wieviel Prozent des Würfelvolumens nimmt die Pyramide ein?

d) Berechnen Sie den Neigungswinkel der Ebene E gegen die Grundfläche $G_1G_2G_3G_4$.
Geben Sie drei Eckpunkte des Würfels W an, die eine Ebene so festlegen, dass sie mit der Grundfläche einen 45°-Winkel einschließt.

e) Zeigen Sie, dass die Ebene F mit der Gleichung F: $x_1 - x_2 + x_3 = 3$ parallel zu E mit Abstand $\sqrt{3}$ ist.

f) Alle Ebenen parallel zu F werden durch Gleichungen der Form $x_1 - x_2 + x_3 = a$, mit $a \in \mathbb{R}$ beschrieben.
Geben Sie an, welche Arten von Figuren als Schnitt einer solchen Ebene mit dem Würfel W auftreten.