Lösungen (Teil mit Hilfsmitteln)

1 a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$P_1(-3/10)$ HP $\Rightarrow f(-3) = 10 \Rightarrow -27a + 9b - 3c + d = 10$

$f'(-3) = 0 \Rightarrow 27a - 6b + c = 0$

$P_2(-1/0)$ NS $\Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow -a + b - c + d = 0$

$P_3(2/0)$ NS $\Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 0$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -27a + 9b - 3c + d = 10 \\ \text{II} & 27a - 6b + c = 0 \\ \text{III} & -a + b - c + d = 0 \\ \text{IV} & 8a + 4b + 2c + d = 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -27 & 9 & -3 & 1 & 10 \\ 27 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

TR ...

$a = 0{,}7$

$b = 2{,}4$

$c = -4{,}5$

$d = -6{,}2$

$\Rightarrow f(x) = 0{,}7x^3 + 2{,}4x^2 - 4{,}5x - 6{,}2$

Test (hinr. Bed.)

$f'(x) = 2{,}1x^2 + 4{,}8x - 4{,}5$

$f''(x) = 4{,}2x + 4{,}8$

$f''(-3) = 4{,}2 \cdot (-3) + 4{,}8 < 0 \Rightarrow$ HP ✓

b) $f(x) = 0$

$0{,}7x^3 + 2{,}4x^2 - 4{,}5x - 6{,}2 = 0$

TR ...

$x_1 = -4{,}43$

$x_2 = -1$

$x_3 = 2$

$\Rightarrow$ Die gesuchte NS ist $x = -4{,}43$

c) N.B.: $f'(x) = 0$

$2{,}1x^2 + 4{,}8x - 4{,}5 = 0$

TR ...

$x_1 = -3$

$x_2 = 0{,}714$

H.B.: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(0{,}714) = 4{,}2 \cdot 0{,}714 + 4{,}8 > 0$

$\Rightarrow$ TP

y-Wert: $f(0{,}714) = -7{,}935$

$\Rightarrow$ TP$(0{,}714 / -7{,}935)$

d) gesucht: x mit $f''(x) = 0$

$f''(x) = 4{,}2x + 4{,}8$

$4{,}2x + 4{,}8 = 0$

$4{,}2x = -4{,}8$

$\underline{x = -\frac{8}{7}}$

e) $y_0 = f(0) = -6{,}2$

$\Rightarrow P(0/-6{,}2)$

$f'(0) = 2{,}1 \cdot 0^2 + 4{,}8 \cdot 0 - 4{,}5 = -4{,}5$

$\Rightarrow t(x) = -4{,}5x + b$

$P(0/-6{,}2)$ auf f $\Rightarrow t(0) = -6{,}2$

$\Rightarrow b = -6{,}2$

$\Rightarrow t(x) = -4{,}5x - 6{,}2$

f) x mit Steigungswinkel 40°

$\Rightarrow f'(x) = \tan 40°$

$f'(x) = 0{,}84$

$\Rightarrow$ gesucht: x mit $f'(x) = 0{,}84$

$2{,}1x^2 + 4{,}8x - 4{,}5 = 0{,}84$

TR ...

$x_1 = -3{,}1$

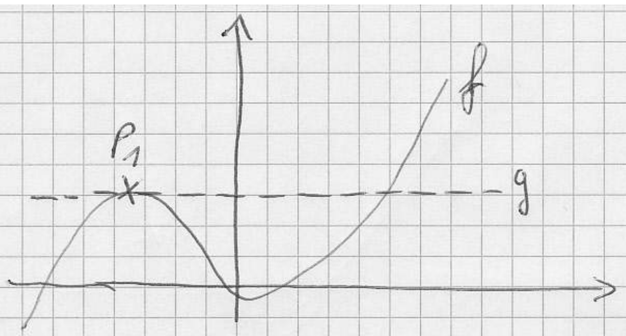
$x_2 = 0{,}82$

Die gesuchten Stellen sind $x_1 = -3{,}1$ und $x_2 = 0{,}82$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

h)



Die Tangente an f durch den Hochpunkt hat nur 2 Schnittpunkte.

$g(x) = 10$

Probe: $f(x) = g(x)$

$0{,}7x^3 + 2{,}4x^2 - 4{,}5x - 6{,}2 = 10$

TR...

$x_1 = -3$

$x_2 = 2{,}57$

i) Bestimmung der Tangente durch den Wendepunkt:

N.B.: $f''(x) = 0$

(aus Teil d): $x = -\frac{8}{7}$

H.B.: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f'''(x) = 4{,}2 \neq 0 \Rightarrow WP$

$f(-\frac{8}{7}) = 1{,}033$

$\Rightarrow WP(-\frac{8}{7} / 1{,}033)$

Tangente:

$f'(-\frac{8}{7}) = 2{,}1 \cdot (-\frac{8}{7})^2 + 4{,}8 \cdot (-\frac{8}{7}) - 4{,}5$

$= -7{,}243$

$\Rightarrow t(x) = -7{,}243x + b$

$WP\left(-\frac{8}{7} / 1{,}033\right)$ auf t $\Rightarrow t\left(-\frac{8}{7}\right) = 1{,}033$

$-7{,}243 \cdot \left(-\frac{8}{7}\right) + b = 1{,}033$

$8{,}277 + b = 1{,}033$

$b = -7{,}244$

$\Rightarrow t(x) = -7{,}243x - 7{,}244$

Probe: $f(x) = t(x)$

$0{,}7x^3 + 2{,}4x^2 - 4{,}5x - 6{,}2 = -7{,}243x - 7{,}244$

$0{,}7x^3 + 2{,}4x^2 + 2{,}743x + 1{,}044 = 0$

T.R...

$x \approx -\frac{8}{7}$ ✓

j) Die Spiegelung entspricht einer Multiplikation mit (-1). Also:

$g(x) = (-1) \cdot f(x)$

$= -1 \cdot (0{,}7x^3 + 2{,}4x^2 - 4{,}5x - 6{,}2)$

$= -0{,}7x^3 - 2{,}4x^2 + 4{,}5x + 6{,}2$

2a) $f(2) = 20$

$\Rightarrow 20.000$ e/h

b) $f(x) = 10$

$x^3 - 11x^2 + 28x = 10$

$x^3 - 11x^2 + 28x - 10 = 0$

TR...

$x_1 = 0{,}43$

$x_2 = 3{,}18$

$x_3 = 7{,}398 \rightarrow$ außerhalb des Def. bereichs

$x_1 = 0{,}43 \approx$ 10:26 Uhr

$x_2 = 3{,}18 \approx$ 13:11 Uhr

c) gesucht: Nullstellen von f

$f(x) = 0$

$x^3 - 11x^2 + 28x = 0$

TR...

$x_1 = 0$

$x_2 = 4$

$x_3 = 7$

$x_1 = 0 \approx$ 10 Uhr

$x_2 = 4 \approx$ 14 Uhr

$x_3 = 7 \approx$ 17 Uhr

d) N.B.: $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 22x + 28$

$f''(x) = 6x - 22$

$3x^2 - 22x + 28 = 0$

TR ...

$x_1 = 1{,}64$

$x_2 = 5{,}69$

H.B.: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(1{,}64) = 6 \cdot 1{,}64 - 22 < 0 \Rightarrow$ lok. HP

$f''(5{,}69) = 6 \cdot 5{,}69 - 22 > 0 \Rightarrow$ lok. TP

Ränder:

$f(0) = 0$

$f(1{,}64) = 20{,}75$

$f(5{,}69) = -12{,}60$

$f(7) = 0$

stärkster Zufluss $x = 1{,}64 \approx$ 11:38 Uhr

mit 20.750 l/h

stärkster Abfluss $x = 5{,}69 =$ 15:41 Uhr

mit 12.600 l/h

e) N.B.: $f''(x) = 0$

$6x - 22 = 0$

$6x = 22$

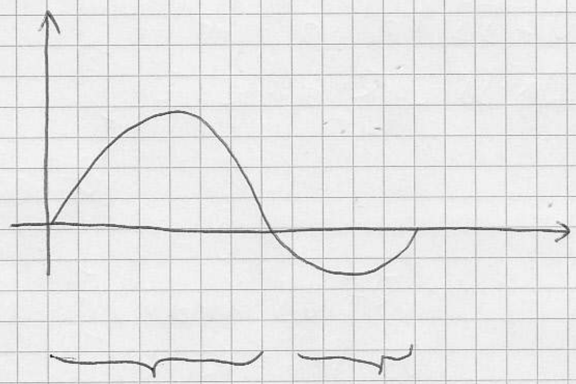
$x = \frac{11}{3}$

H.B.: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
$f'''(\frac{11}{3}) = 6 \neq 0$

Ränder: $f'(0) = 28$
$f'(\frac{11}{3}) = -12,\overline{3}$
$f'(7) = 21$

stärkste Zunahme: um 10 Uhr mit
28.000 $\frac{l}{h^2}$

f)



Wasserzufluss
4 h
Max 20.750 $\frac{l}{h}$

Wasserabfluss
3 h
Max. 12.000 $\frac{l}{h}$

am wenigsten Wasser: 10 Uhr

am meisten Wasser: 14 Uhr

g) Wenn 4 h lang mit 20.750 l/h Wasser zufließen würde, so wären dies maximal $4 \cdot 20.750 < 84.000$ l

h) $g(x) = x^3 - 11x^2 + 28x + 10$

$g(x) = 0$

$x^3 - 11x^2 + 28x + 10 = 0$

TR...

$x_1 = -0{,}32$

$x_2 = 5$

$x_3 = 6{,}31$

Antwort: Ja!

Zwischen $x_2 = 5 \hat{=} 15$ Uhr

und $x_3 = 6{,}31 \hat{=} 16:17$ Uhr

3a) N.B.: $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 32$

$3x^2 - 24x + 32 = 0$

TR ...

$x_1 = 1{,}69$

$x_2 = 6{,}31$

H.B.: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(x) = 6x - 24$

$f''(1{,}69) = 6 \cdot 1{,}69 - 24 < 0$

$\Rightarrow$ lok. HP

$f''(6{,}31) = 6 \cdot 6{,}31 - 24 > 0$

$\Rightarrow$ lok. TP

Ränder:

$f(0) = 0$

$f(1{,}69) = 24{,}63$

$f(6{,}31) = -24{,}63$

$f(9) = 45$

nordlichste Stelle $P_1(9/45)$

südlichste " $P_2(6{,}31/-24{,}63)$

b) $f(2) = 24$ ✓

c) $f(x) = 24$

$x^3 - 12x^2 + 32x = 24$

$x^3 - 12x^2 + 32x - 24 = 0$

TR ...

$x_1 = 1{,}39$
$x_2 = 2$
$x_3 = 8{,}6$

Es sind $8{,}6 - 2 = 6{,}6$ Sm.

d) N.B.: $f''(x) = 0$
$6x - 24 = 0$
$6x = 24$
$x = 4$

H.B.: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
$f'''(4) = 6 \neq 0$

Rechtskrümmung $0 \leq x < 4$
Linkskrümmung $4 < x \leq 7$

e) Antwort: im lokalen Hochpunkt