LÖSUNGEN (hilfsmittelfreier Teil)

1) a) $x^2 - 2x - 8 = 0$

$x = 1 \pm \sqrt{1+8}$

$x = 1 \pm \sqrt{9}$

$x = 1 \pm 3$

$x_1 = -2$

$x_2 = 4$

b) $3x^2 + 3x - 18 = 0 \quad | :3$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6}$

$x = -0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25}$

$x = -0{,}5 \pm 2{,}5$

$x_1 = -3$

$x_2 = 2$

c) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \quad | x^2 = z$

$z^2 - 13z + 36 = 0$

$z = 6{,}5 \pm \sqrt{42{,}25 - 36}$

$z = 6{,}5 \pm \sqrt{6{,}25}$

$z = 6{,}5 \pm 2{,}5$

$z_1 = 4 \wedge z_2 = 9 \quad | z = x^2$

$x^2 = 4 \qquad x^2 = 9 \quad | \sqrt{}$

$x_1 = 2 \qquad x_3 = 3$

$x_2 = -2 \qquad x_4 = -3$

d) $x^3 + 20x^2 = 0$

$x^2 \cdot (x + 20) = 0$

$x^2 = 0 \quad \vee \quad x + 20 = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = -20$

e) geratene Nullstelle: $x_1 = 1$

(denn $1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 5 = 0$)

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 - 9x + 5) : (x-1) = x^2 + 4x - 5 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad 4x^2 - 9x \\
\quad \underline{-(4x^2 - 4x)} \\
\qquad -5x + 5 \\
\qquad \underline{-(-5x + 5)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

restliche Nullstellen:

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$x = -2 \pm \sqrt{4+5}$

$x = -2 \pm \sqrt{9}$

$x = -2 \pm 3$

$x_2 = -5$

$x_3 = 1$

$\Rightarrow$ zwei Nullstellen $\quad x_1 = 1$

$x_2 = -5$

f) geratene Nullstelle: $x = 1$
(denn $1^3 + 1^2 - 10 \cdot 1 + 8 = 0$)

Polynomdivision:

$$(x^3 + x^2 - 10x + 8) : (x-1) = x^2 + 2x - 8$$

$$\begin{array}{l} -(x^3 - x^2) \\ \hline \quad 2x^2 - 10x \\ \quad -(2x^2 - 2x) \\ \hline \qquad -8x + 8 \\ \qquad -(-8x + 8) \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

restliche Nullstellen:

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$x = -1 \pm \sqrt{1+8}$$
$$= -1 \pm \sqrt{9}$$
$$= -1 \pm 3$$
$$x_2 = -4$$
$$x_3 = 2$$

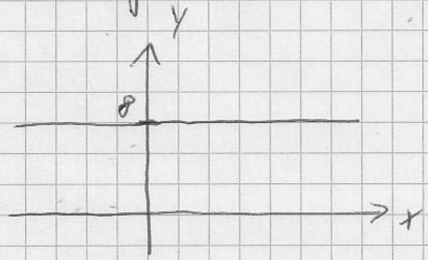
$\Rightarrow$ Nullstellen: $x_1 = 1$
$x_2 = -4$
$x_3 = 2$

2a) Die Funktion ist symmetrisch zur y-Achse, da die Exponenten der Polynome alle gerade sind.

b) Die Funktion ist symmetrisch zum Ursprung, da die Exponenten der Polynome alle ungerade sind.

c) Die Funktion ist weder symmetrisch zur y-Achse noch zum Ursprung, da die Polynome gerade und ungerade Exponenten haben.

d) Die Funktion ist symmetrisch zur y-Achse:



3) Die Funktion $g(x) = x^3$ wäre symmetrisch zum Ursprung $P(0/0)$. Im Vergleich dazu ist f nur um 4 nach oben verschoben. Das Spiegelzentrum hat also die Koordinaten $Z(0/4)$.

4) $f(5) = 0 \Rightarrow 5^2 + a \cdot 5 = 0$

$$25 + 5a = 0$$
$$5a = -25$$
$$a = -5$$

5) $f(2)=0 \Rightarrow 2^3 - 3\cdot 2^2 + 5\cdot a\cdot 2 + 6\cdot a^2 = 0$

$$8 - 12 + 10a + 6a^2 = 0$$

$$6a^2 + 10a - 4 = 0$$

$$a^2 + \frac{5}{3}a - \frac{2}{3} = 0$$

$$a = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{24}{36}}$$

$$a = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{49}{36}}$$

$$a = -\frac{5}{6} \pm \frac{7}{6}$$

$$a_1 = -\frac{12}{6} = -2$$

$$a_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

6)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2\cdot\underline{\mathrm{I}} - \underline{\mathrm{II}} \\ \underline{\mathrm{I}} - \underline{\mathrm{III}} \\ 3\cdot\underline{\mathrm{I}} - \underline{\mathrm{IV}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 5\cdot\underline{\mathrm{III}} + \underline{\mathrm{II}} \\ \underline{\mathrm{II}} - \underline{\mathrm{IV}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Vertauschung der 3. & 4. Spalte

$$\begin{array}{cccc|c} a & b & d & c & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow -3c = -3$

$c = 1$

$\Rightarrow d + 9 = 12$

$d = 3$

$\Rightarrow 5b - 12 - 1 = -3$

$5b - 13 = -3$

$5b = 10$

$b = 2$

$\Rightarrow a + 4 - 3 + 1 = 3$

$a + 2 = 3$

$a = 1$

$\Rightarrow a = 1;\ b = 2;\ c = 1;\ d = 3$

7)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2\cdot \underline{I} - \underline{II} \\ \underline{I} - \underline{III} \\ \underline{I} - \underline{IV} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 15 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2\cdot \underline{II} + \underline{III} \\ 3\cdot \underline{II} + \underline{IV} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & -7 & 3 & -9 \end{array}\right)$$ Vertauschung der 3. und 4. Spalte

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & d & c \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & -9 \end{array}\right) \end{array} \quad 3 \cdot \overline{\underline{III}} + \overline{\underline{IV}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -19 & -57 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow -19c = -57$$
$$c = 3$$
$$\Rightarrow -d - 12 = -16$$
$$-d = -4$$
$$d = 4$$
$$\Rightarrow -b - 6 = -8$$
$$-b = -2$$
$$b = 2$$
$$\Rightarrow a + 2 + 4 + 3 = 10$$
$$a + 9 = 10$$
$$a = 1$$
$$\Rightarrow a = 1;\ b = 2;\ c = 3;\ d = 4$$

8) Das Gauß-Verfahren gilt <u>nur</u> bei <u>linearen</u> Gleichungssystemen!

$\underline{I}.\quad a^2 + b = 10 \quad | -a^2$

$\underline{II}.\quad 2a + b = 7 \quad | -2a$

$$\text{I.} \quad b = 10 - a^2$$
$$\text{II.} \quad b = 7 - 2a$$

$$\Rightarrow \quad 10 - a^2 = 7 - 2a \qquad | -7$$
$$3 - a^2 = -2a \qquad | +a^2$$
$$3 = a^2 - 2a \qquad | -3$$
$$0 = a^2 - 2a - 3$$

$$a = 1 \pm \sqrt{1+3}$$
$$a = 1 \pm \sqrt{4}$$
$$a = 1 \pm 2$$
$$a_1 = -1$$
$$a_2 = 3$$

Bestimmung von b:

$a_1 = -1$
$\Rightarrow b = 7 - 2 \cdot (-1)$
$b = 7 + 2$
$b = 9$

$a_2 = 3$
$\Rightarrow b = 7 - 2 \cdot 3$
$b = 7 - 6$
$b = 1$

$\Rightarrow a = -1$
$b = 9$
Lösung 1

$\Rightarrow a = 3$
$b = 1$
Lösung 2

9) Antwort: Nein!

Beweis: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$
$f'''(x) = 6a \qquad a \neq 0!$

N.B.: $f''(x) = 0$

$$6ax + 2b = 0$$

$$6ax = -2b$$

$$x = -\frac{2b}{6a}$$

$$x = -\frac{1}{3}\,\frac{b}{a}$$

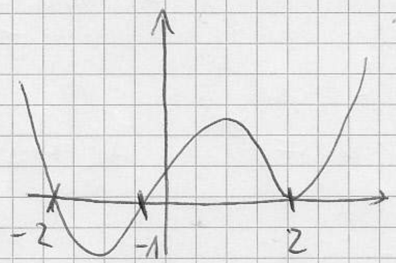
Dieser Wert existiert auf jeden Fall, da $a \neq 0$

H.B.: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$$f'''(x) = 6a \neq 0$$

$\Rightarrow$ WS vorhanden!

10)



$$f(x) = \underbrace{(x+2)\cdot(x+1)}\cdot\underbrace{(x-2)(x-2)}$$
$$= (x^2+3x+2)\cdot(x^2-4)$$
$$= x^4+3x^3+2x^2-4x^2-12x-8$$
$$= x^4+3x^2-2x^2-12x-8$$

11) N.B.: $f'(-1) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 6x + c$

$f'(-1) = 3 - 6 + c = 0$

$= -3 + c = 0$

$-3 + c = 0$

$c = 3$

$\Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 4$

Hinr. Bed.: $f'(-1) = 0 \wedge$ kein Vorzeichenwechsel von f'

$\left.\begin{array}{l} f'(-0{,}9) = 0{,}03 \\ f'(-1{,}1) = 0{,}03 \end{array}\right\}$ kein Vorzeichenwechsel

im Bereich $[-1{,}1; -0{,}9]$ liegt keine weitere NS von f':

$3x^2 + 6x + 3 = 0$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$x = -1 \pm \sqrt{1-1}$

$x = -1$ ✓

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

12) $P_1(1|1)$ HP $\Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + d = 1$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

$P_2(0|-2)$ TP $\Rightarrow f(0) = -2 \Rightarrow d = -2$

$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow$ I. $a + b + c + d = 1$
II. $3a + 2b + c = 0$
III. $d = -2$
$c = 0$

einsetzen

I. $a + b - 2 = 1$
II. $3a + 2b = 0$

I. $a + b = 3$
II. $3a + 2b = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right) 3 \cdot \text{I} - \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow b = 9$
$\Rightarrow a + 9 = 3$
$a = -6$

$\Rightarrow f(x) = -6x^3 + 9x^2 - 2$

Test (hinr. Bed.):
$f'(x) = -18x^2 + 18x$
$f''(x) = -36x + 18$

$f''(1) = -36 \cdot 1 + 18 < 0 \Rightarrow HP$ ✓
$f''(0) = 18 > 0 \Rightarrow TP$ ✓