Lösungen Teil 1

1) a) In einem Quader sind gegenüberliegende Seiten parallel zueinander und die Winkel sind rechte Winkel.
Daher kann man die fehlenden Koordinaten ausrechnen. Bei dem vorliegenden Quader sind die Seiten zudem parallel zu den Koordinatenachsen. Deshalb könnte man die Koordinaten hier auch ohne Rechnen mit dreidimensionalem Vorstellungsvermögen direkt erschließen.

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CG} \quad \text{(wegen Parallelität)}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$\Rightarrow E(3/0/4)$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC} \quad \text{(wegen Parallelität)}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$\Rightarrow B(3/8/0)$

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BF}$

$= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CG}$ (wegen Parallelität)

$= \begin{pmatrix}3\\8\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}3\\8\\4\end{pmatrix}$

$\Rightarrow F(3/8/4)$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3-3\\8-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}0-3\\0-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$

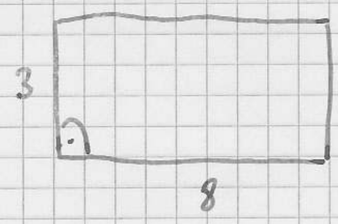
$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ rechter Winkel

c) $|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}\right| = 8$ LE

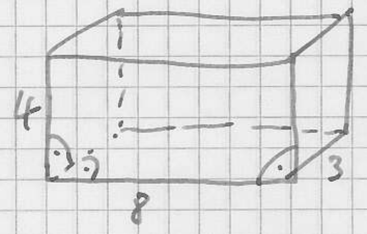
$|\overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}\right| = 3$ LE

d) $A = 3 \cdot 8 = 24$ FE



e) $|\vec{AE}| = \left| \begin{pmatrix} 3-3 \\ 0-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 4$ LE

$V = 3 \cdot 8 \cdot 4 = 96$ VE



f) $\vec{OM_1} = \vec{OD} + 0{,}5 \cdot \vec{DA} + 0{,}5 \cdot \vec{DC}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M_1 (1{,}5 / 4 / 0)$

g) $\vec{OM_2} = \vec{OM_1} + 0{,}5 \cdot \vec{DH}$

$= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

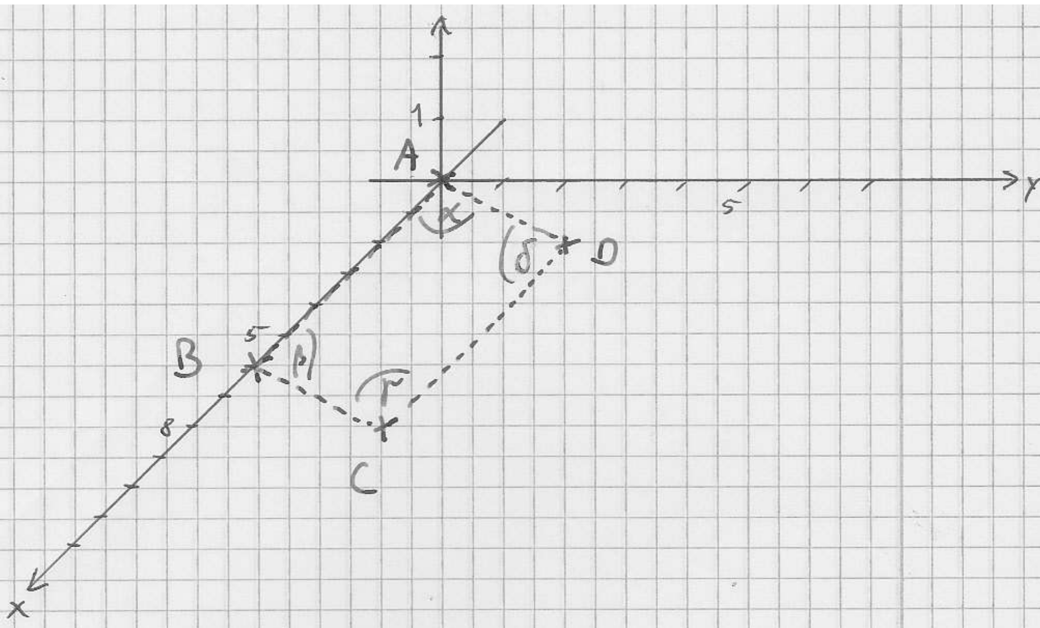
$= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M_2 (1{,}5 / 4 / 2)$

Alternative: $\vec{OM_2} = \vec{OD} + 0{,}5 \cdot \vec{DA} + 0{,}5 \cdot \vec{DC} + 0{,}5 \cdot \vec{DH}$

2a)



b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

zu α: $\vec{AB} \circ \vec{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 12 \neq 0$

$\Rightarrow \alpha \neq 90°$

zu β: $\vec{BA} \circ \vec{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -12 \neq 0$

$\Rightarrow \beta \neq 90°$

zu δ: $\vec{DA} \circ \vec{DC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -12 \neq 0$

$\Rightarrow \delta \neq 90°$

zu γ: $\vec{CB} \circ \vec{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 12 \neq 0$

$\Rightarrow \gamma \neq 90°$

c) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

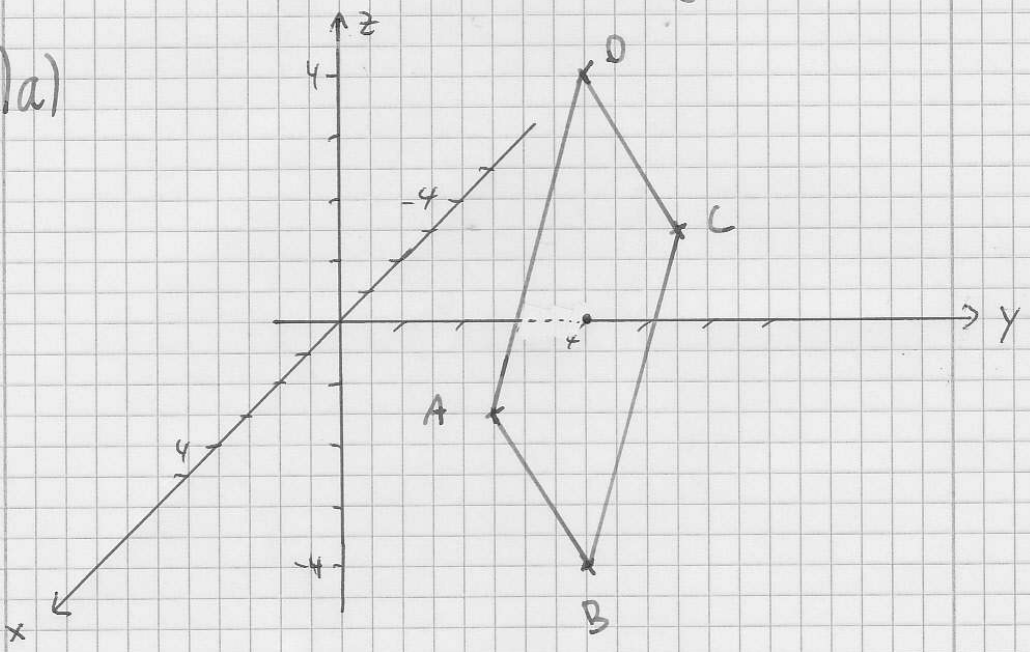
$\vec{DC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die beiden Vektoren sind Vielfache voneinander
$\Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{DC}$

d) Es gilt: $\vec{BC}$ und $\vec{AD}$ sind auch Vielfache voneinander
$\Rightarrow \vec{BC} \parallel \vec{AD}$

$\Rightarrow$ Das Viereck ist ein Parallelogramm

3)a)



b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 4-4 \\ -4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -3-0 \\ 4-4 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 4-4 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3-0 \\ 4-4 \\ 0-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$

$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ LE

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$

$|\overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ LE

$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 9 - 16 = -7 \neq 0$

$\Rightarrow$ kein rechter Winkel bei A

Antwort: Es handelt sich um eine Raute.
Die Seiten sind nämlich alle gleich lang und die gegenüberliegenden Seiten sind parallel zueinander.
Es ist kein Quadrat, da ansonsten der Winkel bei A 90° groß hätte sein müssen.

4) $g: \vec{OX} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB}$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2-3 \\ 9-4 \\ 7-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$ Gleichung 1

$g: \vec{OX} = \vec{OB} + r \cdot \vec{AB}$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$ Gleichung 2

$g: \vec{OX} = \vec{OB} + r \cdot \vec{BA}$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$ Gleichung 3

$g: \vec{OX} = \vec{OA} + r \cdot \vec{BA}$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$ Gleichung 4

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$g: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ Gleichung 5

$g: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$ Gleichung 6

5)

$$\begin{pmatrix}4\\5\\5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \quad \Big| -\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \quad \Big| -r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 4\\1 & -2 & 5\\1 & -1 & 3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\2\cdot\text{II}-\text{I}\\2\cdot\text{III}-\text{I}\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 4\\0 & -3 & 6\\0 & -1 & 2\end{array}\right)$$

$\Rightarrow -3r = 6 \wedge -r = 2$

$\Rightarrow r = -2$

$\Rightarrow 2s + 2 = 4$

$2s = 2$

$s = 1$

$$\Rightarrow \overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix}4\\5\\5\end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4\\5\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-4\\-2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S(2|1|3)$

6) $g: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$h: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren dürfen keine Vielfache voneinander sein.

7) $g: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$h: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Richtungsvektor wurde so gewählt, dass P (2/1/1) nicht auf g liegen kann:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow 1 = 0$ ↯

8) $g: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$h: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind wieder so gewählt worden, dass kein Schnittpunkt entstehen kann. Zugleich sind sie nicht Vielfache voneinander.

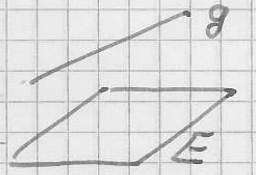
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}0 & -1 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\end{array}\right)$$

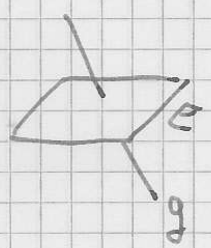
$$\Rightarrow 0 = -1 \quad ↯$$

g) 0 Schnittpunkte

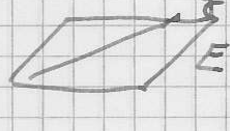


g || E
(parallel)

1 Schnittpunkt



unendlich
viele Schnittpunkte



g ligt in E

10) $E: \vec{0X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$g: \vec{0X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

LÖSUNGEN TEIL 2

1a) $\vec{OP} = \begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}75\\105\\90\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}79\\106\\96\end{pmatrix}$

$\Rightarrow P(79/106/96)$

b) $\begin{pmatrix}129\\176\\156\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}125\\175\\150\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix}$

$\Rightarrow r = 25$

$\Rightarrow$ Das Raumschiff erreicht den Punkt um 10:25 Uhr.

c) zurückgelegter Weg in 15 min (mit den Werten von Teil a):

$\vec{P_1P} = \begin{pmatrix}79-4\\106-1\\96-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}75\\105\\90\end{pmatrix}$

P_1 sei der Aufpunkt.

$$|\overrightarrow{PP_1}| = \left|\begin{pmatrix}75\\105\\90\end{pmatrix}\right| = \sqrt{75^2+105^2+90^2}$$

$$\approx 157,32 \text{ km}$$

$$15 \text{ min} \;—\; 157,32\ldots \text{ km}$$

$$\xrightarrow{\cdot 4} 60 \text{ min} \;—\; 629,29 \text{ km} \xrightarrow{\cdot 4}$$

$\Rightarrow$ Es sind $629,29 \; ^{km}/_{h}$

d) $\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}50\\70\\60\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}54\\71\\66\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BP_2} = \begin{pmatrix}54-0\\71-1\\66-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}54\\70\\60\end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{BP_2}| = \sqrt{54^2+70^2+60^2} \approx 106,85$ km

$\Rightarrow$ Es sind 106,85 km.

e) Alle Punkte der Flugbahn lassen sich beschreiben mit:

$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+5r\\1+7r\\6+6r\end{pmatrix}$

Abstand von X zu B:

$$\vec{BX} = \begin{pmatrix} 4+5r-0 \\ 1+7r-1 \\ 6+6r-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+5r \\ 7r \\ 6r \end{pmatrix}$$

$$|\vec{BX}| = \sqrt{(4+5r)^2+(7r)^2+(6r)^2}$$
$$= \sqrt{16+40r+25r^2+49r^2+36r^2}$$
$$= \sqrt{110r^2+40r+16}$$

gesuchter Abstand: 1000 km

$$|\vec{BX}| = 1000$$

$$\sqrt{110r^2+40r+16} = 1000 \quad |\,()^2$$

$$110r^2+40r+16 = 1.000.000$$
$$110r^2+40r-999.984 = 0$$
$$r^2+\frac{4}{11}r-\frac{499992}{55} = 0$$

$$r = -\frac{2}{11} \pm \sqrt{\frac{4}{121}+\frac{499.992}{55}}$$

$$r_1 = 95{,}164 \approx 1\,h\ 35\,min\ 10\,sek$$

$$r_2 = -95{,}527 \approx -1\,h\ 35\,min\ 32\,sek$$

Antwort: Das Schiff taucht um 8:24 auf dem Radarschirm auf und verschwindet um 11:35 Uhr.

f) ① $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -15 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Big| - r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -15 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -5 & -15 \\ 1 & -7 & -2 \\ 3 & -6 & 9 \end{array}\right)$$

Taschenrechner

$r = 1$

$s = 5$

Antwort: Ja, es gibt einen Schnittpunkt. (Die Koordinaten des Schnittpunkts sind nicht gefragt).

② Ankunft am Schnittpunkt:

Bonaparte 10:01
Empereur 10:05

Antwort: Nein. Die Raumschiffe passieren den Punkt zu verschiedenen Zeiten.

g) ① $\begin{pmatrix} 4000 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{1. Zeile}]{}$ $4000 = 4 + 5r \quad | -4$

$3996 = 5r \quad | :5$

$799{,}2 = r$

$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 799{,}2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4000 \\ 5594{,}4 \\ 4801{,}2 \end{pmatrix}$

Antwort: $y = 5594{,}4$

$z = 4801{,}2$

② $799{,}2$ min $\hat{=}$ 13 h 19 min 12 sek

Es war um 23:19 Uhr.

③ $\overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + 799{,}2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1579{,}4 \\ 802{,}2 \\ 2394{,}6 \end{pmatrix}$

Das zweite Schiff befindet sich im Punkt $P_3(-1579{,}4 / 802{,}2 / 2394{,}6)$.

Entfernung:

$\overrightarrow{CP_3} = \begin{pmatrix} -1579{,}4 - 4000 \\ 802{,}2 - 5594{,}4 \\ 2394{,}6 - 4801{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5579{,}4 \\ -4792{,}2 \\ -2406{,}6 \end{pmatrix}$

$|\vec{CP_3}| \approx 7738{,}64\ km$

Die Entfernung beträgt 7738,64 km.

2) a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 5-1 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \approx 4{,}47\ LE$

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -1-4 \\ 6-5 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\vec{BC}| = \sqrt{25+1+1} = \sqrt{27} \approx 5{,}196\ LE$

$\vec{CD} = \begin{pmatrix} -3-(-1) \\ 2-6 \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\vec{DC}| = 4{,}47\ LE$

$\vec{AD} = \begin{pmatrix} -3-2 \\ 2-1 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\vec{AD}| = 5{,}196\ LE$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{AB} \circ \vec{AD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{27}} = \dfrac{-10+4}{\sqrt{540}}$

$= \dfrac{-6}{\sqrt{540}}$

$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{-6}{\sqrt{540}}\right) \approx 104{,}96°$

$\cos\beta = \dfrac{\vec{BA} \circ \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \dfrac{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{27}} = \dfrac{6}{\sqrt{540}}$

$\Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\dfrac{6}{\sqrt{540}}\right) \approx 75{,}04°$

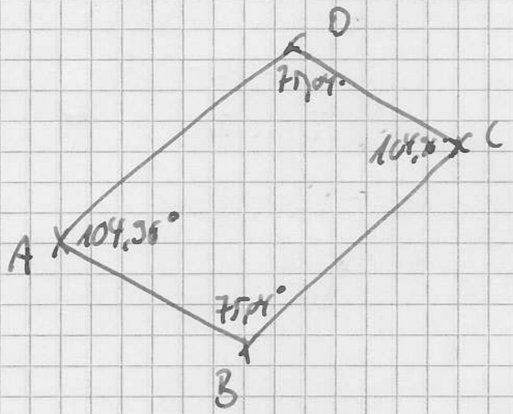
$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CD} \circ \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CD}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{\begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{27}} = \frac{-6}{\sqrt{540}}$$

$$\Rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{540}}\right) = 104{,}96°$$

$$\cos\delta = \frac{\overrightarrow{DC} \circ \overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{DC}| \cdot |\overrightarrow{DA}|} = \frac{\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{27}} = \frac{10-4}{\sqrt{540}} = \frac{6}{\sqrt{540}}$$

$$\Rightarrow \delta = \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{540}}\right) \approx 75{,}04°$$

c)



$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$

Es handelt sich um ein Parallelogramm.

d)

$$A = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$$

$$= \left|\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix}4\\-2\\2+20\end{pmatrix}\right|$$

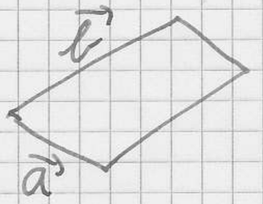
$$= \left|\begin{pmatrix}4\\-2\\22\end{pmatrix}\right|$$

$$= \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 22^2}$$

$$= \sqrt{504} \approx 22{,}4499 \text{ FE}$$

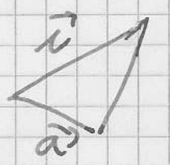
2	−5
4	1
0	1
2	−5
4	1

Für ein Parallelogramm gilt:



$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Für ein Dreieck gilt:



$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$$

e) $E: \vec{OX} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AD}$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

f) Gerade g durch A und C:

$$g: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1-2 \\ 6-1 \\ 5-4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gerade h durch D und B:

$$g: \vec{OX} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4-(-3) \\ 5-2 \\ 4-5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}7\\3\\-1\end{pmatrix} \quad \Big| -\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}7\\3\\-1\end{pmatrix} \quad \Big| -r\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}7\\3\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\-5\\-1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}7 & 3 & 5\\3 & -5 & -1\\-1 & -1 & -1\end{array}\right)$$

Taschenrechner:

$s = 0,5$

$r = 0,5$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + 0,5\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,5\\3,5\\4,5\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S(0,5/3,5/4,5)$

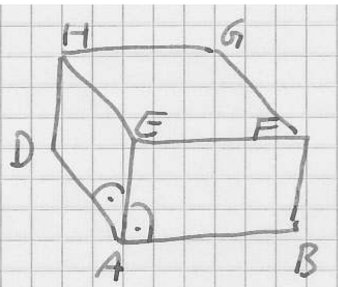
Entfernung:

$$|\overrightarrow{AS}| = \left|\begin{pmatrix}0,5-2\\3,5-1\\4,5-4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1,5\\2,5\\0,5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1,5)^2+2,5^2+0,5^2}$$

$$\approx 2,958 \text{ LE}$$

$\Rightarrow$ Entfernung 2,958 LE

g)



Da bei einem Quader rechte Winkel vorhanden sind, gilt:

$\vec{AE} \perp \vec{AB}$ UND $\vec{AE} \perp \vec{AD}$

Daraus folgt: $\vec{AE}$ ist ein Vielfaches von $\vec{AB} \times \vec{AB}$

Außerdem gilt:

$V = \text{Grundfläche} \cdot |\vec{AE}|$

$224{,}499 = 22{,}4499 \cdot |\vec{AE}|$ (Aufgabenteil d)

$10 = |\vec{AE}|$

$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 22 \end{pmatrix}$

$|\vec{AB} \times \vec{AD}| = 22{,}4499$

$\Rightarrow \vec{AE} = \frac{10}{22{,}4499} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40/22{,}4499 \\ -20/22{,}4499 \\ 220/22{,}4499 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}78 \\ -0{,}89 \\ 9{,}8 \end{pmatrix}$

Und es gilt: $\vec{AE} = \vec{BF} = \vec{DG} = \vec{DH}$
(wegen Parallelität)

Also: $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}78 \\ -0{,}89 \\ 9{,}8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3{,}78 \\ 0{,}11 \\ 13{,}8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow E(3{,}78 / 0{,}11 / 13{,}8)$

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AE}$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}78 \\ -0{,}89 \\ 9{,}8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5{,}78 \\ 4{,}11 \\ 13{,}8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow F(5{,}78 / 4{,}11 / 13{,}8)$

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AE}$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}78 \\ -0{,}89 \\ 9{,}8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}78 \\ 5{,}11 \\ 14{,}8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow G(0{,}78 / 5{,}11 / 14{,}8)$

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AE}$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}78 \\ -0{,}89 \\ 9{,}8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1{,}22 \\ 1{,}11 \\ 14{,}8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow H(-1{,}22 / 1{,}11 / 14{,}8)$

3a) $\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{CG}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E(0/0/14)$

$\vec{OF} = \vec{OB} + \vec{CG}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow F(0/10/14)$

$\vec{OI} = \vec{OJ} + \vec{GF}$

$= \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow I(0/5/18)$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{IE} \circ \vec{IF}}{|\vec{IE}| \cdot |\vec{IF}|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{41}} = \dfrac{-25+16}{41} = \dfrac{-9}{41}$

$\vec{IE} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-5 \\ 14-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

$|\vec{IE}| = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} \approx 6{,}4$

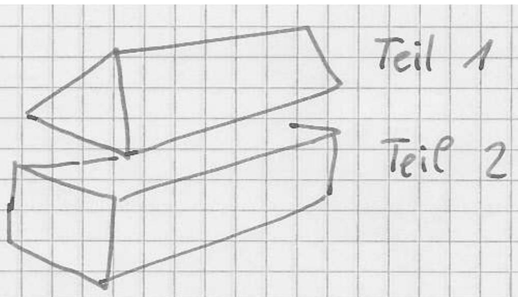
$\vec{IF} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 10-5 \\ 14-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

$|\vec{IF}| = \sqrt{41} = 6{,}4$

$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{-9}{41}\right)$

$\alpha \approx 102{,}68°$

c)



Teil 1: Grundfläche G

$$G = \frac{1}{2} \cdot |\vec{TE} \times \vec{TF}|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -5 & 5 \\ -4 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & 5 \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 40$$
$$= 20 \text{ FE}$$

$$V = G \cdot |\vec{FG}|$$
$$= 20 \text{ FE} \cdot 20 \text{ LE}$$
$$\underline{\underline{= 400 \text{ VE}}}$$

$$|\vec{FG}| = \begin{pmatrix} -20-0 \\ 10-10 \\ 14-14 \end{pmatrix}$$
$$= \left| \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$
$$= 20 \text{ LE}$$

Teil 2: Grundfläche (Rechteck)

$$G = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AE}|$$
$$= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} \right|$$
$$= 10 \cdot 14$$
$$= 140 \text{ FE}$$

$$V = G \cdot |\vec{FG}|$$
$$= 140 \cdot 20$$
$$= 2800 \text{ VE}$$

$$V_{Haus} = V_{Teil\,1} + V_{Teil\,2} = 3200 \text{ VE}$$

d)

$$g: \vec{OX} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AG}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$= r \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{OX} = \vec{OB} + s \cdot \vec{BH}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \Big| - r \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ 14 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -20 & 20 & 0 \\ -10 & -10 & -10 \\ 14 & -14 & 0 \end{array} \right)$$

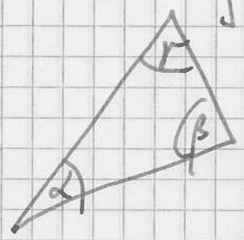
Taschenrechner:

$$0 = 1 \quad ↯$$

Es gibt keinen Schnittpunkt.

e)

$J(-20/5/18)$



$C(-20/10/0)$

$A(0/0/0)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AC} \circ \vec{AJ}}{|\vec{AC}| \cdot |\vec{AJ}|} = \frac{\begin{pmatrix}-20\\10\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-20\\5\\18\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-20\\10\\0\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-20\\5\\18\end{pmatrix}\right|}$$

$$= \frac{400+50}{\sqrt{500} \cdot \sqrt{749}} = \frac{450}{\sqrt{374500}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{450}{\sqrt{374500}}\right) \approx 42{,}66°$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{CA} \circ \vec{CJ}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CJ}|} = \frac{\begin{pmatrix}20\\-10\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\-5\\18\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}20\\-10\\0\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\-5\\18\end{pmatrix}\right|}$$

$$= \frac{50}{\sqrt{500} \cdot \sqrt{349}} = \frac{50}{\sqrt{174500}}$$

$$\Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{50}{\sqrt{174.500}}\right) \approx 83{,}13°$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{JC} \circ \vec{JA}}{|\vec{JC}| \cdot |\vec{JA}|} = \frac{\begin{pmatrix}0\\5\\-18\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}20\\-5\\-18\end{pmatrix}}{\sqrt{349} \cdot \sqrt{749}}$$

$$= \frac{-25+324}{\sqrt{261.401}} = \frac{299}{\sqrt{261.401}}$$

$$\Rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{299}{\sqrt{261.401}}\right) \approx 54{,}21°$$

f) $E: \vec{OX} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AC} + s \cdot \vec{AJ}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$= r \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

g) $\vec{OM} = \vec{OA} + 0{,}5 \cdot \vec{AB} + 0{,}5 \cdot \vec{AD} + 0{,}5 \cdot \vec{AE}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M(-10|5|7)$

Liegt der Punkt M in E?

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -20 & -20 & -10 \\ 10 & 5 & 5 \\ 0 & 18 & 7 \end{array}\right)$$

Taschenrechner:

$0 = 1$ ↯

M liegt nicht in E

h) Gleichung der Schattenlinie:

$$\vec{OX} = \vec{OI} + r \cdot \vec{SI}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 5 - 50 \\ 18 - 100 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -45 \\ -82 \end{pmatrix}$$

Gesucht: X mit $X(x/y/0)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -45 \\ -82 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 = 18 - 82r$$

$$-18 = -82r$$

$$\frac{9}{41} = r$$

$$\Rightarrow \vec{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix} + \frac{9}{41} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -45 \\ -82 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -200/41 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Der Schatten von I hat die Koordinaten $S\,(0/-200/41/0)$.