Lösungen

1) a) $3^2 = 9$

b) $3^4 = 81$

c) $7^4 = 2401$

d) $9^0 = 1$

e) $9^{-1} = \frac{1}{9} = 0{,}\overline{1}$

f) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

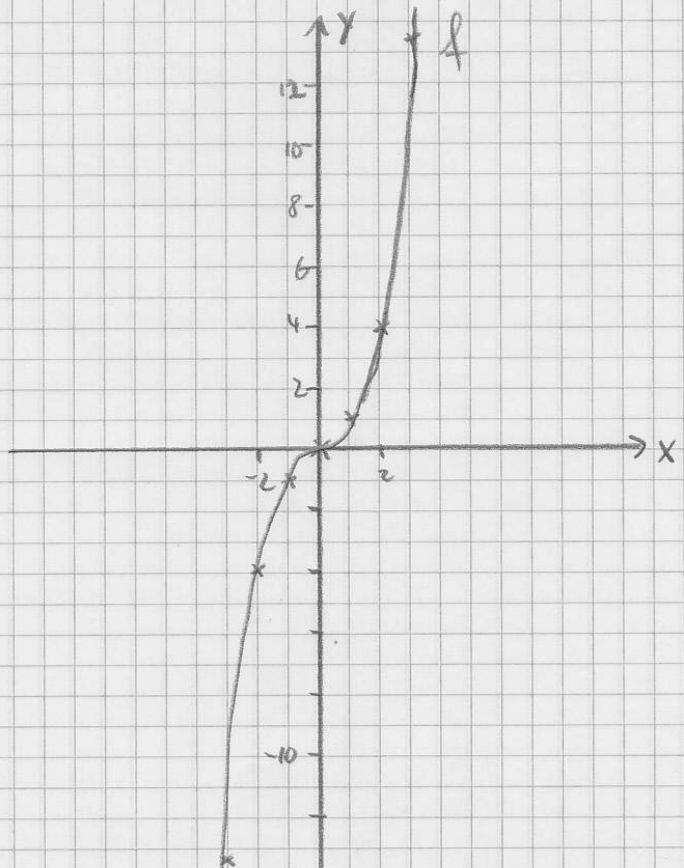
g) $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

h) $7^2 = 49$

i) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0{,}008$

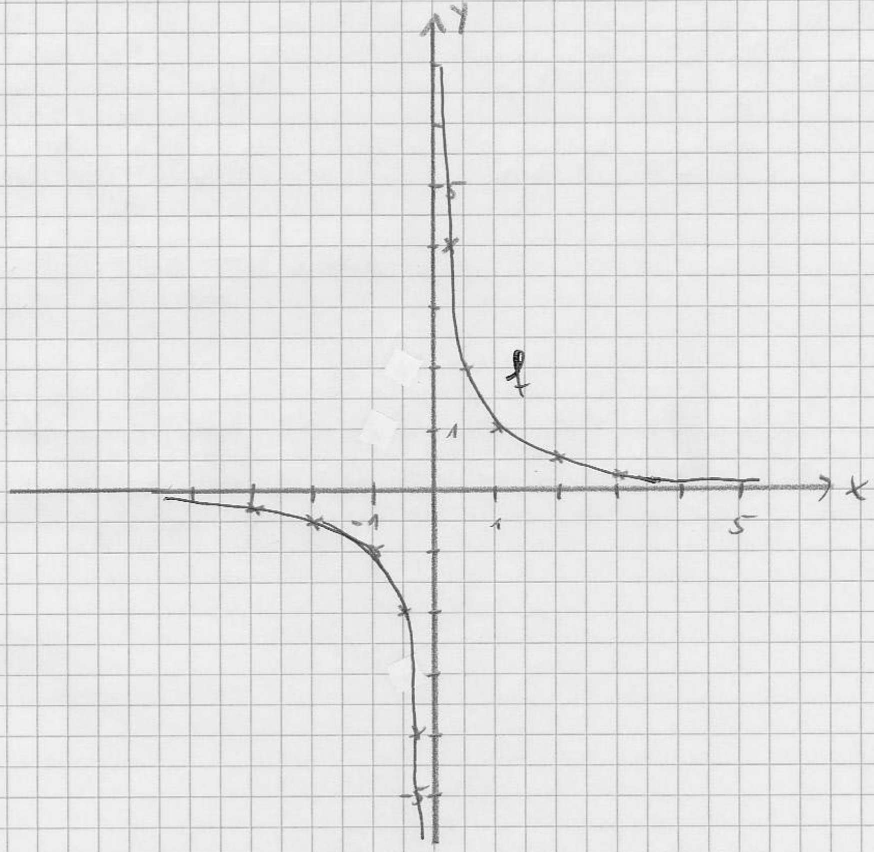
2)

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)	-13,5	-7,81	-4	-1,69	-1	-0,06	0	0,06	1	1,69	4	7,81	13,5



3)

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	$-0,1$	0	$0,1$	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3
$f(x)$	$-0,\overline{3}$	$-0,4$	$-0,5$	$-0,\overline{6}$	-1	-2	-10	/	10	2	1	$0,\overline{6}$	$0,5$	$0,4$	$0,\overline{3}$



Bei $x=0$ existiert kein Funktionswert.
Der Graph hat an dieser Stelle eine Art
Loch (eine Definitionslücke).

4) Man sieht: der Graph verläuft nach links betrachtet nach minus unendlich, daher muss n ungerade sein.

Wir testen $f(x) = x^3$:

$f(2) = 2^3 = 8$

Das entspricht dem rechts oben markierten Punkt.
Es handelt sich also um $f(x) = x^3$.

5) a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

$= 2\,(x^2 - 2{,}5x + 0{,}5)$

$= 2\,[(x - 1{,}25)^2 + 0{,}5 - 1{,}5625]$

$= 2\,[(x - 1{,}25)^2 - 1{,}0625]$

$= 2\,(x - 1{,}25)^2 - 2{,}125$

$\Rightarrow S(1{,}25 / -2{,}125)$

b) $f(x) = 0$

$2x^2 - 5x + 1 = 0 \quad | :2$

$x^2 - 2{,}5x + 0{,}5 = 0$

$x = 1{,}25 \pm \sqrt{1{,}5625 - 0{,}5}$

$x = 1{,}25 \pm \sqrt{1{,}0625}$

$x_1 = 0{,}22$

$x_2 = 2{,}28$

$\Rightarrow N_1(0{,}22 / 0)$

$N_2(2{,}28 / 0)$

c) $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 1 = 1$

$\Rightarrow S_y\,(0/1)$

d) $f(3) = 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 1 = 18 - 15 + 1 = 4$

$\Rightarrow A(3/4)$

e) $f(x) = 10$

$2x^2 - 5x + 1 = 10 \quad | -10$

$2x^2 - 5x - 9 = 0 \quad | :2$

$x^2 - 2{,}5x - 4{,}5 = 0$

$x = 1{,}25 \pm \sqrt{1{,}5625 + 4{,}5}$

$x = 1{,}25 \pm \sqrt{6{,}0625}$

$x_1 = 3{,}71$

$x_2 = -1{,}71$

$\Rightarrow B_1\,(3{,}71/10)$

$B_2\,(-1{,}71/10)$

f) $f(x) = g(x)$

$2x^2 - 5x + 1 = 2x + 1 \quad | -2x$

$2x^2 - 7x + 1 = 1 \quad | -1$

$2x^2 - 7x = 0 \quad | :2$

$x^2 - 3{,}5x = 0$

$x = 1{,}75 \pm \sqrt{3{,}0625}$

$x_1 = 3{,}5$

$x_2 = 0$

y-Werte:

$g(0) = 1$

$g(3{,}5) = 2 \cdot 3{,}5 + 1 = 8$

$\Rightarrow S_1(0|1)$

$S_2(3{,}5|8)$

g) $f(x) = h(x)$

$2x^2 - 5x + 1 = x^2 + 1 \quad | -x^2$

$x^2 - 5x + 1 = 1 \quad | -1$

$x^2 - 5x = 0$

$x = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25}$

$x_1 = 5$

$x_2 = 0$

y-Werte: $h(5) = 25 + 1 = 26$

$h(0) = 1$

$\Rightarrow S_3(5|26)$

$S_4(0|1)$

6) a) $f(x) = a(x-d)^2 + e$

$S(2|3) \Rightarrow f(x) = a(x-2)^2 + 3$

$A(1|5)$ auf f $\Rightarrow f(1) = 5$

$a(1-2)^2 + 3 = 5$

$a(-1)^2 + 3 = 5$

$$a + 3 = 5 \quad | -3$$
$$a = 2$$

$\Rightarrow f(x) = 2(x-2)^2 + 3$ Scheitelpunktsform

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2(x-2)^2 + 3 \\
&= 2(x^2 - 4x + 4) + 3 \\
&= 2x^2 - 8x + 8 + 3 \\
&= 2x^2 - 8x + 11
\end{aligned}
$$
Normalform

b) $f(x) = 0$

$$2x^2 - 8x + 11 = 0 \quad | :2$$
$$x^2 - 4x + 5{,}5 = 0$$
$$x = 2 \pm \sqrt{4 - 5{,}5}$$
$$x = 2 \pm \sqrt{-1{,}5} \quad ↯$$

Die Funktion hat keine Nullstellen

c) $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 11 = 11$

$\Rightarrow S_y(0/11)$

d) $f(5) = y$

$f(5) = 2 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5 + 11 = 50 - 40 + 11 = 21$

$\Rightarrow A(5/21)$

e) $f(x) = 10$

$$2x^2 - 8x + 11 = 10 \quad | -10$$
$$2x^2 - 8x + 1 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 - 4x + 0{,}5 = 0$$
$$x = 2 \pm \sqrt{4 - 0{,}5}$$
$$x = 2 \pm \sqrt{3{,}5}$$
$$x_1 = 0{,}13$$
$$x_2 = 3{,}87$$

$\Rightarrow B_1(0{,}13 / 10)$
$B_2(3{,}87 / 10)$

f) $f(x) = g(x)$

$$2x^2 - 8x + 11 = x + 9 \quad | -x$$
$$2x^2 - 7x + 11 = 9 \quad | -9$$
$$2x^2 - 7x + 2 = 0 \quad | :2$$
$$x^2 - 3{,}5x + 1 = 0$$
$$x = 1{,}75 \pm \sqrt{3{,}0625 - 1}$$
$$x = 1{,}75 \pm \sqrt{2{,}0625}$$

$$x_1 = 0{,}31$$
$$x_2 = 3{,}19$$

y-Werte: $g(0{,}31) = 0{,}31 + 9 = 9{,}31$
$g(3{,}19) = 3{,}19 + 9 = 12{,}19$

$\Rightarrow S_1(0{,}31 / 9{,}31)$
$S_2(3{,}19 / 12{,}19)$

g) $f(x) = h(x)$

$$2x^2 - 8x + 11 = x \quad | -x$$
$$2x^2 - 7x + 11 = 0 \quad | :2$$

$x^2 - 3{,}5x + 5{,}5 = 0$

$x = 1{,}75 \pm \sqrt{3{,}0625 - 5{,}5}$

$x = 1{,}75 \pm \sqrt{-2{,}4375}$ ↯

Es gibt keine Schnittpunkte von f mit h.

7) a) $x = -1$ Nullstelle $\Rightarrow f(-1) = 0$

$$\Rightarrow (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + a = 0$$
$$1 - 2 + a = 0$$
$$-1 + a = 0 \quad | +1$$
$$a = 1$$

$\Rightarrow a = 1$

b) $f(x) = 0$

$x^2 + 2x + a = 0$

$x = -1 \pm \sqrt{1 - a}$

Die Gleichung hat genau dann keine Lösung, wenn der Wert unterhalb der Wurzel < 0 ist

$1 - a < 0 \quad | +a$

$1 < a$

$\Rightarrow a > 1$

c) $x_1 = 1 + \sqrt{1-a}$

$x_2 = 1 - \sqrt{1-a}$

(siehe Teil b)

8) a) 11 Uhr $\hat{=}$ $x = 0$

$f(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 + 91 = 91$

Die Geschwindigkeit betrug 91 km/h.

b) 12 Uhr $\hat{=}$ $x = 1$

$f(1) = -1^2 + 6 \cdot 1 + 91 = -1 + 6 + 91 = 96$

Die Geschwindigkeit beträgt 96 km/h.

c) $f(x) = 80$

$-x^2 + 6x + 91 = 80 \quad | -80$

$-x^2 + 6x + 11 = 0 \quad | \cdot (-1)$

$x^2 - 6x - 11 = 0$

$x = 3 \pm \sqrt{9 + 11}$

$x = 3 \pm \sqrt{20}$

$x_1 = 7{,}47$

$x_2 = -1{,}47$ ← außerhalb des betrachteten Zeitraums:

$0 \leq x \leq 8$

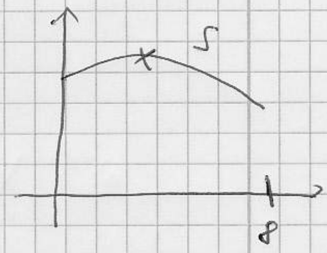
$x = 7{,}47 \hat{=} 7h + 0{,}47h$

$7h + 28{,}2$ min

$(0{,}47 \cdot 60 = 28{,}2)$

Er hatte um 18:28 Uhr eine Geschw. von 80 km/h.

d) gesucht: Scheitelpunkt:

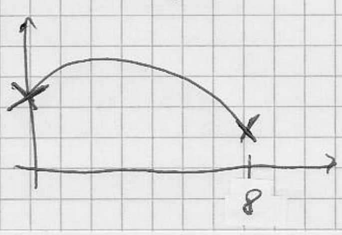


$$f(x) = -x^2 + 6x + 91$$
$$= -1 \cdot (x^2 - 6x - 91)$$
$$= -1 \cdot [(x-3)^2 - 91 - 9]$$
$$= -1 \cdot [(x-3)^2 - 100]$$
$$= -1 \cdot (x-3)^2 + 100$$

$\Rightarrow S(3/100)$

Die höchste Geschwindigkeit war um 14 Uhr mit 100 km/h.

e) Die Parabel ist nach unten geöffnet, die niedrigste Geschw. muss also an der linken oder rechten Grenze vorliegen:



$f(0) = 91$

$f(8) = -8^2 + 6 \cdot 8 + 91 = -64 + 48 + 91 = 75$

Die niedrigste Geschwindigkeit war um 19 Uhr mit 75 km/h.

f) höchste Geschw.: 100 km/h

Dauer: 8 h

maximaler Weg: $100 \, km/h \cdot 8 \, h = 800 \, km$