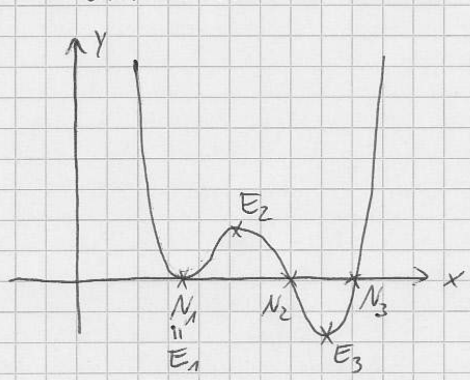
Lösungen (hilfsmittelfrei)

1) max. 4
(Eine Funktion n-ten Grades hat maximal n Nullstellen)

2) max. 3
(Eine Funktion n-ten Grades hat maximal n-2 Wendestellen)

3) a) mind. 4
(weil sie 3 Extremstellen hat)
(Eine Funktion n-ten Grades hat maximal n-1 Extremstellen)
Sie kann nicht 3. Grades sein, da solche Funktionen max. 2 Extremstellen haben.

b)



4) mind. 3
(da sie eine Wendestelle hat und Funktionen mit Grad ≤ 2 keine Wendestellen haben)

5) $S(1|2)$ Scheitelpunkt $\Rightarrow f(x) = a(x-1)^2+2$

$A(2|4)$ auf f $\Rightarrow f(2) = 4$

$$a(2-1)^2+2 = 4$$
$$a \cdot 1^2 + 2 = 4$$
$$a + 2 = 4$$
$$a = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2(x-1)^2+2$$
$$= 2(x^2-2x+1)+2$$
$$= 2x^2-4x+2+2$$
$$= 2x^2-4x+4$$

6) $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

$f'(x) = 3ax^2+2bx+c$

$A(0|0)$ auf f $\Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow d=0$

Steigung 2 $\Rightarrow f'(0)=2 \Rightarrow c=2$

$B(1|1)$ auf f $\Rightarrow f(1)=1 \Rightarrow a+b+c+d=1$

$C(2|4)$ auf f $\Rightarrow f(2)=4 \Rightarrow 8a+4b+2c+d=4$

I. $a+b+c+d=1$ | Einsetzen von c und d

II. $8a+4b+2c+d=4$

I. $a+b+2=1$

II. $8a+4b+4=4$

$I.\quad a + b = -1$
$II.\quad 8a + 4b = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & 0 \end{array}\right) 8 \cdot I - II$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -8 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 4b = -8$
$b = -2$

$\Rightarrow a - 2 = -1$
$a = 1$

$\Rightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$

7) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$A(0|3)$ auf f $\Rightarrow f(0) = 3 \Rightarrow c = 3$

$B(1|1{,}5)$ auf f $\Rightarrow f(1) = 1{,}5 \Rightarrow a + b + c = 1{,}5$

$C(-1|5{,}5)$ auf f $\Rightarrow f(-1) = 5{,}5 \Rightarrow a - b + c = 5{,}5$

$I.\quad a + b + c = 1{,}5$ | Einsetzen von c
$II.\quad a - b + c = 5{,}5$

$I.\quad a + b + 3 = 1{,}5$
$II.\quad a - b + 3 = 5{,}5$

$I.\quad a + b = -1{,}5$
$II.\quad a - b = 2{,}5$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1{,}5 \\ 1 & -1 & 2{,}5 \end{array}\right) \text{I}-\text{II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1{,}5 \\ 0 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 2b = -4$
$b = -2$

$\Rightarrow a - 2 = -1{,}5$
$a = 0{,}5$

$\Rightarrow f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 3$

8) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$\underset{\text{auf } f}{A(0|0)} \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$
Extremstelle $\Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$\underset{\text{auf } f}{B(-1|2)} \Rightarrow f(-1) = 2 \Rightarrow -a + b - c + d = 2$
Extremstelle $\Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0$

I. $-a + b - c + d = 2$ | Einsetzen von c und d
II. $3a - 2b + c = 0$

I. $-a + b = 2$
II. $3a - 2b = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right) 3 \cdot \text{I} + \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow b = 6$

$\Rightarrow -a + 6 = 2$

$-a = -4$

$a = 4$

$\Rightarrow f(x) = 4x^3 + 6x^2$

Überprüfung der Extremstellen:

H.B.: $f''(x) \neq 0$

$f'(x) = 12x^2 + 12x$

$f''(x) = 24x + 12$

$f''(0) = 12 \neq 0$ ✓

$f''(-1) = -24 + 12 = 12 \neq 0$ ✓

9) nein
(Eine Funktion 3. Grades hat maximal drei Nullstellen)

10) entweder 0, eine oder zwei

11) a) $2x - 1 = 0$

$2x = 1$

$x = 0{,}5$

$\Rightarrow N(0{,}5/0)$

b) $f(x) = g(x)$

$x^2 = 2x - 1$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$x = 1 \pm \sqrt{1-1}$

$x = 1$

$y = g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$\Rightarrow S(1/1)$

12) $f(x) = ax + b$

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{7-10}{0-2} = \frac{-3}{-2} = +1,5$$

Achsenabschnitt 7

$\Rightarrow f(x) = 1,5x + 7$

13)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2 \cdot \mathrm{I} - \mathrm{II} \\ \mathrm{I} - \mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{II} + 3 \cdot \mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 9c = -9$

$c = -1$

$\Rightarrow 3b - 3 = 3$

$3b = 6$

$b = 2$

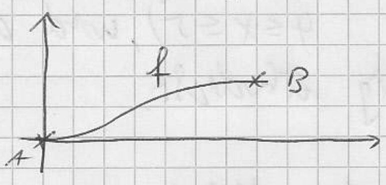
$\Rightarrow a + 2 - 1 = 2$

$a + 1 = 2$

$a = 1$

Lösungen (mit Hilfsmitteln)

1) a)



$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$A(0|0)$ auf f $\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

waagerecht $\Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$B(5|1)$ auf f $\Rightarrow f(5) = 1 \Rightarrow 125a + 25b = 1$

waagerecht $\Rightarrow f'(5) = 0 \Rightarrow 75a + 10b = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 125 & 25 & 1 \\ 75 & 10 & 0 \end{array}\right)$$

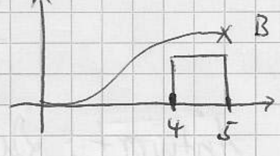
$\underset{(TR)}{\Rightarrow} a = \frac{-2}{125}$

$b = \frac{3}{25}$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{2}{125}x^3 + \frac{3}{25}x^2, \quad 0 \leq x \leq 5$

b) $f(4) = -\frac{2}{125} \cdot 4^3 + \frac{3}{25} \cdot 4^2$

$= 0{,}896$



Am linken Rand befindet sich die Auffahrt auf 0,896 m Höhe, also über der 0,7 m hohen Platte. Da die Auffahrt anschließend weiter ansteigt ($f'(x) > 0$ für $4 \leq x \leq 5$), wird die Platte vollständig überdeckt.

c) gesucht: Max. der Ableitung

$f'(x) = -\frac{6}{125}x^2 + \frac{6}{25}x$ $\quad$ $f''(x) = -\frac{12}{125}x + \frac{6}{25}$

$f'''(x) = -\frac{12}{125}$

N.B.: $f''(x) = 0$

$-\frac{12}{125}x + \frac{6}{25} = 0$

$-\frac{12}{125}x = -\frac{6}{25}$

$x = 2{,}5$

H.B.: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$f'''(2{,}5) = -\frac{12}{125}$

$\Rightarrow$ lok. Max. bei $x = 2{,}5$

Ränder: $f'(0) = 0$

$f'(2{,}5) = 0{,}3 \Rightarrow$ glob. Max. bei $x = 2{,}5$

$f'(5) = 0$

$f(2{,}5) = 0{,}5$

Antwort: Die steilste Stelle befindet sich bei $P(2{,}5 / 0{,}5)$.

d) gesucht: Schnittpunkt

$f(x) = g(x)$

$-\frac{2}{125}x^3 + \frac{3}{25}x^2 = 0{,}5x - 1$

$-0{,}016x^3 + 0{,}12x^2 = 0{,}5x - 1 \quad |-0{,}5x \; |+1$

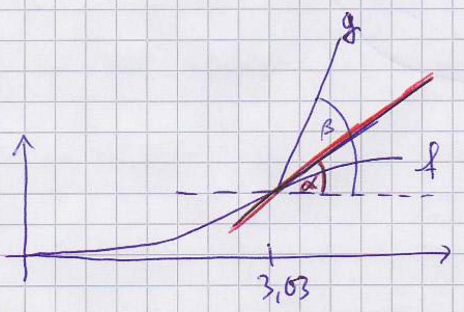
$-0{,}016x^3 + 0{,}12x^2 - 0{,}5x + 1 = 0$

$\underset{(TR)}{\Rightarrow} \quad x \approx 3{,}63$

y-Wert: $g(3{,}63) = 0{,}5 \cdot 3{,}63 - 1$
$= 0{,}815$

Antwort: Sie landet auf dem Punkt $P(3{,}63/0{,}815)$.

e)



α: Steigungswinkel von f an der Stelle 3,63
β: " " g " " "

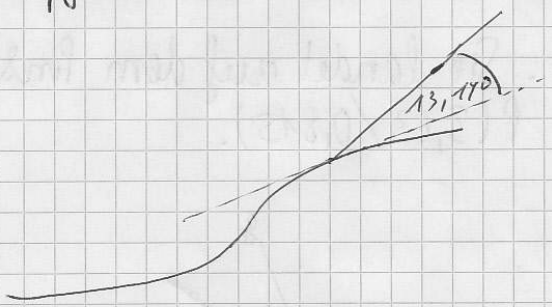
Der gesuchte Winkel ergibt sich durch die Subtraktion der Winkel.

$\tan\alpha = f'(3{,}63)$
$\tan\alpha = 0{,}2387$
$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(0{,}2387) \approx 13{,}43°$

$\tan \beta = g'(3,63)$
$\tan \beta = 0,5$
$\Rightarrow \beta = \tan^{-1}(0,5)$
$\beta = 26,57$

$\sphericalangle \text{Auftreffen} = \beta - \alpha$
$= 26,57 - 13,43$
$= 13,14°$

Antwort: Die Flugroute der Fliege schließt einen 13,14°-Winkel mit der Auffahrt ein.



2a) $f(x) = ax^2 + bx + c$
$f'(x) = 2ax + b$

$A(0|15)$ auf f $\Rightarrow f(0) = 15 \Rightarrow c = 15$

$B(50|35)$ auf f $\Rightarrow f(50) = 35 \Rightarrow 2500a + 50b + c = 35$

Steigung 0,5 $\Rightarrow f'(50) = 0{,}5 \Rightarrow 100a + b = 0{,}5$

I. $2500a + 50b + c = 35$ | Einsetzen von c
II. $100a + b = 0{,}5$

I $2500a + 50b + 15 = 35$
II $100a + b = 0{,}5$

I $2500a + 50b = 20$
II $100a + b = 0{,}5$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2500 & 50 & 20 \\ 100 & 1 & 0{,}5 \end{array}\right)$$

$\xrightarrow{TR}$ $a = 0{,}002$
$b = 0{,}3$

$\Rightarrow f(x) = 0{,}002x^2 + 0{,}3x + 15, \quad 0 \le x \le 50$

b) gesucht: Maximum der Ableitung

$f'(x) = 0{,}004x + 0{,}3$
$f''(x) = 0{,}004$

N.B.: $f'(x)=0$

$$0{,}004x + 0{,}3 = 0$$
$$0{,}004x = -0{,}3$$
$$x = -75$$

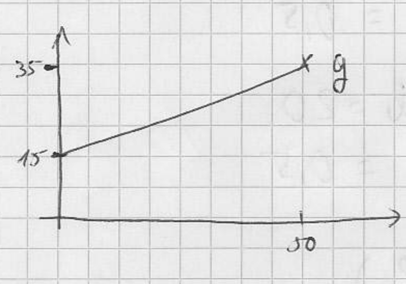
(außerhalb des Def. bereichs)

Ränder: $f'(0) = 0{,}3$

$f'(50) = 0{,}5$

Antwort: Der Verlauf ist bei B(50/35) am steilsten.

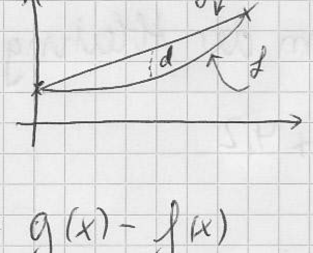
c)



$$g(x) = ax + b$$

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{35-15}{50-0} = \frac{20}{50} = 0{,}4$$

$$\Rightarrow g(x) = 0{,}4x + 15$$



$$d(x) = g(x) - f(x)$$

$d(x) = 0{,}4x + 15 - (0{,}002x^2 + 0{,}3x + 15)$

$= -0{,}002x^2 + 0{,}1x \quad , \quad 0 \le d \le 50$

gesucht: Maximum von d

N.B.: $d'(x) = 0$

$d'(x) = -0{,}004x + 0{,}1$

$-0{,}004x + 0{,}1 = 0$

$-0{,}004x = -0{,}1$

$x = 25$

H.B.: $d'(x) = 0$ und $d''(x) = 0$

$d''(x) = -0{,}004$

$d''(25) = -0{,}004 < 0$

$\Rightarrow$ loS. Max. bei $x = 25$

Ränder: $d(0) = 0$

$d(25) = 1{,}25$

$d(50) = 0$

Antwort: Der Durchhang ist bei $P(25/23{,}75)$ am größten.

3a) $A(1|25,3)$
$B(3|33,1)$
$C(5|22,5)$
$D(10|10)$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$A(1|25,3) \Rightarrow a + b + c + d = 25,3$
$B(3|33,1) \Rightarrow 27a + 9b + 3c + d = 33,1$
$C(5|22,5) \Rightarrow 125a + 25b + 5c + d = 22,5$
$D(10|10) \Rightarrow 1000a + 100b + 10c + d = 10$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 25,3 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 33,1 \\ 125 & 25 & 5 & 1 & 22,5 \\ 1000 & 100 & 10 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

$\underset{(TR)}{\Rightarrow}$ $a = 0,3$
$b = -5$
$c = 20$
$d = 10$

$\Rightarrow f(x) = 0,3x^3 - 5x^2 + 20x + 10$

b) gesucht: Extremstellen

$f'(x) = 0,9x^2 - 10x + 20$ $\quad f''(x) = 1,8x - 10$

N.B.: $f'(x) = 0$
$0,9x^2 - 10x + 20 = 0$

$\underset{TR}{\Longrightarrow}$ $x_1 = 2{,}62$

$x_2 = 8{,}50$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(2{,}62) = 1{,}8 \cdot 2{,}62 - 10 < 0 \Rightarrow$ lok. Max.

$f''(8{,}5) = 1{,}8 \cdot 8{,}5 - 10 > 0 \Rightarrow$ lok. Min.

Ränder:

$f(0) = 10$

$f(2{,}62) = 33{,}47$

$f(8{,}5) = 2{,}99$

$f(12) = 48{,}4$

Antwort:
- geringste Entfernung 18:30 Uhr mit 2,99 km
- größte Entfernung 22 Uhr mit 48,4 km

c) $f(x) = 30$

$0{,}3x^3 - 5x^2 + 20x + 10 = 30$

$0{,}3x^3 - 5x^2 + 20x - 20 = 0$

$\underset{(TR)}{\Longrightarrow}$ $x_1 = 1{,}53$

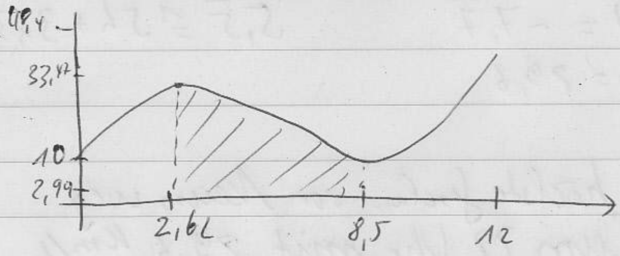
$x_2 = 3{,}85$

$x_3 = 11{,}28$

$1{,}53\ h \hat{=} 1\ h + 31{,}8$ min
$3{,}85\ h \hat{=} 3\ h + 51$ min
$11{,}78\ h \hat{=} 11\ h + 16{,}8$ min

Antwort: Die Entfernung beträgt um ca. 11:32 Uhr, 13:51 Uhr und um ca. 21:17 Uhr 30 km.

d)



$x = 2{,}62 \hat{=} 2\ h + 37{,}2$ min

Er fährt von ca. 12:37 Uhr bis ca. 18:30 Uhr auf Neuss zu.

e) Geschwindigkeit: $v(x)$
$v(x) = f'(x)$
$v(x) = 0{,}9x^2 - 10x + 20$

gesucht: Maximum von $v(x)$

N.B.: $v'(x) = 0$
$v'(x) = 1{,}8x - 10$
$1{,}8x - 10 = 0$
$1{,}8x = 10$
$x = 5{,}\overline{5}$

H.B.: $v'(x) = 0$ und $v''(x) \neq 0$

$v''(x) = 1{,}8$

$v''(5{,}\bar{5}) = 1{,}8 > 0$

$\Rightarrow$ Minimum

Ränder:

$v(0) = 20$

$v(5{,}\bar{5}) = -7{,}\bar{7}$ $\qquad$ $5{,}\bar{5} \mathrel{\hat{=}} 5h + 33{,}\bar{3}$ min

$v(12) = 29{,}6$

Antwort: höchste Geschw. von Neuss weg
um 22 Uhr mit 29,6 km/h

höchste Geschw. auf Neuss zu
um 15:33 Uhr mit $7{,}\bar{7}$ km/h.